DOI :10.16152 /j.cnki.xdxbzr.2008.04.005
西北大学学报(自然科学版)
2008年8月,第38卷第4期, Aug., 2008, Vol.38, No.4
Journal of Northwest University (Natural Science Edition)

关于伪Smarandache函数的一个方程及其正整数解

张爱玲

(西安理工大学 高等技术学院,陕西 西安 710082)

摘要:目的 研究一类包含伪Smarandache函数方程的可解性。方法 利用初等及解析方法。结果 证明了该方程有且仅有两个正整数解。结论 彻底解决了Kenichiro Kashihara提出的该方程的所有正整数解的问题。

关 键 词:伪Smarandache函数;方程;正整数解
中图分类号:O156.4 文献标识码:A 文章编号:1000-274X(2008)04-0535-03

1 引言及结论

对任意正整数n,著名的伪Smarandache函数$Z(n)$定义为最小的正整数m使得$n\mid\frac{m(m+1)}{2}$。即

$$Z(n)=\min\left\{m:\ n\mid\frac{m(m+1)}{2},\ m\in N\right\}。$$

其中N表示所有正整数集合。例如,$Z(n)$的前几个值为

$Z(1)=1$, $Z(2)=3$, $Z(3)=2$, $Z(4)=7$, $Z(5)=4$, $Z(6)=3$, $Z(7)=6$, $Z(8)=15$, $Z(9)=8$, $Z(10)=4$, $Z(11)=10$, $Z(12)=8$, $Z(13)=12$, $Z(14)=7$, $Z(15)=5$, $Z(16)=31$, $Z(17)=16$, $Z(18)=8$, $Z(19)=18$, $Z(20)=15$, …。

该函数是David Gorski在文献[1]中提出的,同时他也研究了$Z(n)$的初等性质,获得了一系列有趣的结果。其中一些性质如下:

a)如果$p>2$是一个素数,那么$Z(p)=p-1$;

b)如果$n=2^k$,那么$Z(n)=2^{k+1}-1$;

c)设$p>2$为素数,那么$Z(2p)=p$,如果$p\equiv 3(\bmod 4)$;$Z(2p)=p-1$,如果$p\equiv 1(\bmod 4)$;

d)对任意奇素数p,若$p\mid n$,则有$Z(n)\geqslant p-1$。

其他有关伪Smarandache函数的工作可参阅文献[2-4]。Kenichiro Kashihara建议我们求方程

$$\sum_{k=1}^{n} Z(k)=\frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

的所有正整数解。关于这一问题,至今似乎还没有人研究,至少我们没有看到相关的论文。这一问题是有意义的,因为函数$Z(n)$的值分布很不规则,对一些正整数n如$n=\frac{m(m+1)}{2}$,有$Z(n)=m<\sqrt{2n}$。对于另外一些整数如$n=2^{\alpha}$,有$S(n)=2^{\alpha+1}-1=2n-1>n$。因此,$Z(n)$的值分布很不规则。通过研究方程(1)的正整数解也是探讨函数$Z(n)$值分布规律的一个有效手法。本文的主要目的是利用初等方法研究方程(1)的可解性,并获得了该方程的所有正整数解。具体地说也就是证明了下面的定理。

定 理 对任意正整数n,方程(1)成立当且仅当$n=1, 3$。

2 定理的证明

引 理 对于任意正整数n,有估计式

$$\sum_{k\leqslant n} Z(2k)\leqslant\frac{15}{16}n^2+\frac{9}{2}n+\frac{45}{4}。$$

证 明 分两种情况讨论:当$n=2m$为偶数时,有

$$\sum_{k\leqslant n} Z(2k)=\sum_{k\leqslant m} Z(2(2k-1))+\sum_{k\leqslant m} Z(4k), \tag{2}$$

注意到$Z(2(2k-1))\leqslant 2k-1$,如果$2\mid k$,$Z(2(2k$

收稿日期:2007-01-07
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10671155)
作者简介:张爱玲(1972-),女,陕西西安人,西安理工大学教师,从事软件工程与基础数学研究。

$-1))\leqslant 2k-2$，如果 $2\nmid k$，于是有

$$\sum_{k\leqslant m} Z(2(2k-1))\leqslant Z(2)+\sum_{1<k\leqslant m}(2k-1)=\frac{n^2}{4}+2。\qquad(3)$$

设 $u=[\frac{m+1}{2}]$ 表示不超过 $\frac{m+1}{2}$ 的最大整数。则有

$$\sum_{k\leqslant m} Z(4k)\leqslant\sum_{k\leqslant u}Z(4(2k-1))+\sum_{k\leqslant u}Z(8k)。\qquad(4)$$

当 $2k-1>4$ 时注意到：$Z(4(2k-1))\leqslant 2k-2$，如果 $k\equiv 1(\bmod 4)$；$Z(4(2k-1))\leqslant 2k-1$，如果 $k\equiv 0(\bmod 4)$；$Z(4(2k-1))\leqslant 3(2k-1)-1$，如果 $k\equiv 2(\bmod 4)$；$Z(4(2k-1))\leqslant 3(2k-1)$，如果 $k\equiv 3(\bmod 4)$。所以有

$$\sum_{k\leqslant u}Z(4(2k-1))\leqslant Z(4)+Z(12)+\sum_{3\leqslant k\leqslant u}3(2k-1)=4-1+\sum_{k\leqslant u}3(2k-1)=3(u^2+1)\leqslant 3+\frac{3(m+1)^2}{4}。\qquad(5)$$

注意到 $Z(2n)\leqslant 4n-1$，有

$$\sum_{k\leqslant u}Z(8k)\leqslant\sum_{k\leqslant u}(16k-1)\leqslant 8u(u+1)-u\leqslant 2(m+1)^2+\frac{7(m+1)}{2}。\qquad(6)$$

结合式（4）～（6），可得

$$\sum_{k\leqslant m}Z(4k)\leqslant\sum_{k\leqslant u}Z(4(2k-1))+\sum_{k\leqslant u}Z(8k)\leqslant\frac{11}{4}(m+1)^2+\frac{7m+13}{2}=\frac{11}{16}n^2+\frac{9n}{2}+\frac{37}{4}。\qquad(7)$$

由式（2）、（3）及（7）立刻得到

$$\sum_{k\leqslant n}Z(2k)=\sum_{k\leqslant m}Z(2(2k-1))+\sum_{k\leqslant m}Z(4k)\leqslant\frac{15}{16}n^2+\frac{9n}{2}+\frac{45}{4}。$$

于是，证明了当 n 为偶数时引理成立。

当 n 为奇数时，设 $n=2m+1$，注意到估计式 $Z(2(2m+1))\leqslant 2m+1$，应用 n 为偶数的结果，仍然有不等式

$$\sum_{k\leqslant n}Z(2k)=\sum_{k\leqslant 2m+1}Z(2k)=Z(2(2m+1))+\sum_{k\leqslant 2m}Z(2k)<\frac{15}{16}n^2+\frac{9n}{2}+\frac{45}{4}。$$

于是，完成了引理的证明。

现在应用这一引理来完成定理的证明。首先证明当 $n\geqslant 64$ 时有

$$\sum_{k=1}^{n}Z(k)<\frac{n(n+1)}{2}。\qquad(8)$$

事实上当 $n\geqslant 64$ 时，设 $u=[\frac{n+1}{2}]$，注意到 $Z(2k+1)\leqslant 2k$ 由引理有

$$\sum_{k\leqslant n}Z(k)=\sum_{k\leqslant u}Z(2k-1)+\sum_{k\leqslant\frac{n}{2}}Z(2k)\leqslant 1+\sum_{2\leqslant k\leqslant u}(2k-2)+\frac{15}{64}n^2+\frac{9n}{4}+\frac{45}{4}\leqslant\frac{31}{64}n^2+\frac{5n}{4}+\frac{49}{4}<\frac{n(n+1)}{2},$$

所以当 $n\geqslant 64$ 时有不等式

$$\sum_{k=1}^{n}Z(k)<\frac{n(n+1)}{2},$$

即式（8）成立。因此当 $n\geqslant 64$ 时方程（1）没有正整数解。当 $n<64$ 时，通过直接检验和编程序验证可得 $n=1$ 及 $n=3$ 是方程（1）的解。于是，完成了定理的证明。

附 C 语言验证程序如下：

```
main()
{
 int m;
 int n, a[64], j=0, min, i, sum=0;
 clrscr();
 for(n=1; n<=64; n++)
{ j=0;
 for(m=1; m<=64; m++)
{ if((m*(m+1)/2% n==0))
   { a[j]=m; j++; }
min=a[0];
 for(i=0; i<j-1; i++)
   if(min>a[i]) min=a[i];
}
 sum+=min;
 if(sum==n*(n+1)/2)
 printf("n=%d=m", n);
}
}
```

参考文献：

[1] GORSKI D. The pseudo Smarandache function[J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13: 140-149.

[2] SMARANDACHE F. Only Problems, Not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

（下转第 **540** 页）

[6] HE B S, LIAO L Z. Improvements of some projection methods for monotone nonlinear variational inequalities[J]. Journal of Optimization Theory and Application, 2002, 112(1): 111-128.
[7] HE B S, YANG Z H, YUAN X M. An approximate proximal-extragradient type method for monotone variational inequalities[J]. Journal of Optimization Theory and Application, 2004, 300: 362-374.
[8] HE B S. A class of projection and contraction methods for monotone variational inequalities[J]. Applied Mathematics and Optimization, 1997, 35: 69-76.
[9] HAN D R, LO HONG K. Two new self-adaptive projection methods for variational inequality problems[J]. Computers and Mathematics with Application, 2002, 43: 152-157.

(编 辑 亢小玉)

A new self-adaptive projection method for variational inequalities

BAI Hong-fang, GAO Xing-bao
(College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)

Abstract: Aim To propose a new self-adaptive projection method for variational inequalities and prove that the new method is global convergence under mild condition. Methods Improve searching direction of the existing method and provide new step-size. Results The searching direction and the step-size of the proposed method are not zero near the solution, and its global convergence is proved under the pesudomonotonicity of the underlying mapping. The efficience of the new method is illustrated by some preliminary computational results. Conclusion Compared with the existing methods, the new method has fast convergence and weak convergence condition, and thus it has larger application scope.

Key words: variational inequalities; self-adaptive projection method; pesudomotone; global convergence

(上接第 536页)

[3] Kenichiro Kashihara. Comments and topics on Smarandache notions and problems[M]. New Mexico: Erhus University Press, 1996.
[4] LIU Yanni. On the smarandache pseudo number sequence[J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics, 2006, 10(4): 42-59.
[5] 张文鹏. 初等数论[M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2007.
[6] 赵红星. 关于 F. Smarandache函数及其 k次补数[J]. 西北大学学报: 自然科学版, 2007, 37(6): 948-951.

(编 辑 亢小玉)

An equation involving the pseudo Smarandache function and its positive integer solutions

ZHANG Ai-ling
(Faculty of Higher Technical, Xi'an University of Technology, Xi'an 710082, China)

Abstract: Aim To study the positive integer solutions of an equation involving the pseudo Smarandache function $Z(n)$. Methods Using the elementary and analytic methods. Results It has proved that the equation has and only has two positive integer solutions. Conclusion A problem was solved completely which was proposed by Kenichiro Kashihara in an unpublished paper.

Key words: the pseudo Smarandache function; equation; positive integer solution