文章编号: 1004 - 1729(2015) 02 - 097 - 03

关于伪 Smarandache 函数的一个混合均值

王曦浛，高 丽，鲁伟阳
(延安大学 数学与计算机科学学院，陕西 延安 716000)

摘 要: 对任意的正整数 n，著名的伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n \mid m(m+1)/2$，即 $Z(n)=\min\{m: n\mid m(m+1)/2, m\in \mathbf{N}\}$. 对任意的正整数 n，算术函数 $\bar{\Omega}(n)$ 定义 $\bar{\Omega}(1)=0$，当 $n>1$ 且 $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$ 为 n 的标准分解式时，$\bar{\Omega}(n)=\alpha_1p_1+\alpha_2p_2+\cdots+\alpha_kp_k$. 利用初等方法和解析方法研究了伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 与算术函数 $\bar{\Omega}(n)$ 的混合均值问题，并得到一个较强的渐近公式.

关键词: 伪 Smarandache 函数; 算术函数; 混合均值; 渐近公式
中图分类号: O 156.4 **文献标志码:** A DOI: 10.15886/j.cnki.hdxbzkb.2015.0017

对任意的正整数 n，著名的伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n\mid m(m+1)/2$，即 $Z(n)=\min\{m: n\mid m(m+1)/2, m\in\mathbf{N}\}$. 有关伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 的问题，有不少学者研究过且取得不少成果[1-2]. 如 Lou Yuanbing[3] 研究了一个包含伪 Smarandache 函数的均值，即证明了

$$\sum_{n\leqslant x}\ln Z(n) = x\ln x + O(x);$$

Cheng Lin[4] 证明了渐近式

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{p(n)}{Z(n)}=\frac{x}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right).$$

笔者曾讨论了 Smarandache 双阶乘函数与伪 Smarandache 函数的复合函数 $Sdf(Z(n))$ 均值[5]，即证明了

$$\sum_{n\leqslant x}Sdf(Z(n))=\frac{\pi^2(2x)^{3/2}}{18\ln\sqrt{2x}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i(2x)^{3/2}}{\ln^i\sqrt{2x}}+O\left(\frac{x^{3/2}}{\ln^{k+1}x}\right).$$

对任意的正整数 n，算术函数 $\bar{\Omega}(n)$ 定义为 $\bar{\Omega}(1)=0$，当 $n>1$ 且 $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$(其中 p_i 为素数，$1\leqslant i\leqslant k$) 为 n 的标准分解式时，$\bar{\Omega}(n)=\alpha_1p_1+\alpha_2p_2+\cdots+\alpha_kp_k$. 显然此函数是一个完全可加函数，即对任意的正整数 m 及 n，有 $\bar{\Omega}(mn)=\bar{\Omega}(m)+\bar{\Omega}(n)$. 文献[6] 研究了函数 $\bar{\Omega}(n)$ 的均值问题，并给出一个较强的渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\bar{\Omega}(n)=x^2\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right), \tag{1}$$

其中，$c_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为可计算的常数且 $c_1=\pi^2/12$.

本文主要利用初等及解析的方法研究伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 与算术函数 $\bar{\Omega}(n)$ 的混合均值问题，并得到一个较强的渐近公式.

定理 1 设 $k\geqslant 2$ 是给定的正整数，则对任意的实数 $x\geqslant 2$，有渐近式

收稿日期: 2015 - 01 - 21
基金项目: 陕西省科技厅科学技术研究发展计划项目(2013JQ1019); 延安大学校级科研计划项目 - 引导项目(YD2014 - 05); 延安大学研究生教育创新计划项目.
作者简介: 王曦浛(1990 -)，女，陕西乾县人，2014 级硕士研究生.
通信作者: 高丽(1966 -)，女，陕西绥德人，教授，硕士生导师，研究方向: 数论、函数论，E-mail: yadxgl@163.com

$$\sum_{n\leqslant x} Z(n)\cdot\bar{\Omega}(n)=\frac{\zeta(3)x^2}{3\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i x^3}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right),\tag{2}$$

其中,$a_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为可计算的常数.

1 相关引理

引理 1[7-8] 对任意的正整数 n 和 k,有 $1\leqslant Z(n)\leqslant 2n-1$,当 $n=2^k$ 时,$Z(n)=2n-1$;当 $n=p^k$ 时,$Z(n)=n-1$,其中 p 为奇素数;若 n 为任意的合数时,$Z(n)=\max\{Z(m):m\mid n\}$.

引理 2[9] 设 $x\geqslant 2$ 为实数,则有 $\pi(x)=\sum_{p\leqslant x}1=\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right)$,其中 $c_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是常数且 $c_1=1$.

2 定理的证明

将 $[1,x]$ 中的所有整数分为 3 个集合 A,B 和 C,其中集合 $A=\{n\mid n=2^k,k=1,2,\cdots\}$;集合 B 包含所有满足:存在奇素数 p 使得 $p\mid n$ 的正整数 n,并且 p 满足 $p>\sqrt{n}$;而集合 C 包含区间 $[1,x]$ 中不属于集合 A 和 B 的正整数 n. 首先在集合 A 中讨论,由引理 1 可知

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}} Z(n)\cdot\bar{\Omega}(n)=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}} Z(n)\cdot\bar{\Omega}(2^k)=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}2k\cdot Z(n)=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}2k\cdot(2n-1)\ll\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}n^2\ll\frac{x^2}{\ln x}.\tag{3}$$

其次在集合 B 中讨论,由引理 1 知

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in B}} Z(n)\cdot\bar{\Omega}(n)&=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p\mid n,p>\sqrt{n}}} Z(n)\cdot\bar{\Omega}(n)=\sum_{\substack{np\leqslant x\\ n<p}} Z(np)\cdot\bar{\Omega}(np)=\sum_{\substack{np\leqslant x\\ n<p}} Z(p)\left[p+\bar{\Omega}(n)\right]=\\ &\sum_{\substack{np\leqslant x\\ n<p}}(p-1)\left[p+\bar{\Omega}(n)\right]=\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sum_{n<p<x/n}p^2+\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sum_{n<p<x/n}p\,\bar{\Omega}(n)-\\ &\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sum_{n<p<x/n}p-\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sum_{n<p<x/n}\bar{\Omega}(n).\end{aligned}\tag{4}$$

由引理 2 及 Abel 求和公式[10] 可得

$$\sum_{n<p<x/n}p^2=\left(\frac{x}{n}\right)^2\pi\left(\frac{x}{n}\right)-n^2\pi(n)-\int_n^{x/n}2y\pi(y)\,\mathrm{d}y=\frac{x^3}{3n^3\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i x^3\ln^i n}{n^3\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{n^3\ln^{k+1}x}\right),\tag{5}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sum_{n<p<x/n}p^2&=\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\left(\frac{x^3}{3n^3\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i x^3\ln^i n}{n^3\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{n^3\ln^{k+1}x}\right)\right)=\frac{x^3}{3\ln x}\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{n^3}+\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\left(\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i x^3\ln^i n}{n^3\ln^i x}\right)+\\ &\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\left(O\left(\frac{x^3}{n^3\ln^{k+1}x}\right)\right)=\frac{\zeta(3)x^3}{3\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i x^3}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right),\end{aligned}\tag{6}$$

其中,$a_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为可计算的常数.

$$\sum_{n<p<x/n}p=\frac{x}{n}\pi\left(\frac{x}{n}\right)-n\pi(n)-\int_n^{x/n}\pi(y)\,\mathrm{d}y=\frac{x^2}{2n^2\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i x^2\ln^i n}{n^2\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{n^2\ln^{k+1}x}\right),\tag{7}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sum_{n<p<x/n}p&=\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\left(\frac{x^2}{2n^2\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i x^2\ln^i n}{n^2\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{n^2\ln^{k+1}x}\right)\right)=\frac{x^2}{2\ln x}\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{n^2}+\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\left(\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i x^2\ln^i n}{n^2\ln^i x}\right)+\\ &\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\left(O\left(\frac{x^2}{n^2\ln^{k+1}x}\right)\right)=\frac{\zeta(2)x^2}{2\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{d_i x^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right),\end{aligned}\tag{8}$$

其中,$d_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为可计算的常数.

$$\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sum_{n<p<x/n}p\,\bar{\Omega}(n)\leqslant\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sqrt{x}\pi\left(\frac{x}{n}\right)\bar{\Omega}(n)\leqslant\sqrt{x}\frac{x}{\ln x}\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\frac{\bar{\Omega}(n)}{n}\ll\frac{x^{3/2}}{\ln^2 x};\tag{9}$$

$$\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sum_{n<p<x/n}\bar{\Omega}(n)\ll\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sqrt{x}\,\bar{\Omega}(n)\ll\frac{x}{\ln x}\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\frac{\bar{\Omega}(n)}{n}\ll x^{3/2}.\tag{10}$$

结合式(4),(6),(8),(9)和(10)可得

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in B}} Z(n) \cdot \overline{\Omega}(n) = \frac{\zeta(3)\, x^3}{3 \ln x} + \sum_{i=2}^{k} \frac{a_i x^3}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1} x}\right),$$

其中,a_i($i = 1,2,\cdots,k$)为可计算的常数.

最后在集合 C 中讨论,由伪 Smarandache 函数的性质可知,对任意的正整数 $n \in C$,当 n 的标准分解式为 $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$,此时有 2 种情况: $Z(n) = Z(p_r) = p_r - 1 \leqslant \sqrt{n}$ 或者 $Z(n) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant r}\{Z(p_i^{\alpha_i})\} = p_i^{\alpha_i} - 1 < p_i^{\alpha_i}$,其中 $\alpha_i \geqslant 2$. 于是有

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in C}} Z(n) \cdot \overline{\Omega}(n) &\ll \sum_{\substack{np \leqslant x \\ p \mid n, p \leqslant \sqrt{n}}} \overline{\Omega}(np) \cdot \sqrt{np} + \sum_{\substack{np^{\alpha} \leqslant x, \alpha \geqslant 2 \\ p^{\alpha} \mid n, p \leqslant \sqrt{n}}} (\alpha + 1) \cdot p^{\alpha} \cdot \overline{\Omega}(np) = \\
&\sum_{\substack{np \leqslant x \\ p \mid n, p \leqslant \sqrt{n}}} (p + \overline{\Omega}(n)) \cdot \sqrt{np} + \sum_{\substack{np^{\alpha} \leqslant x, \alpha \geqslant 2 \\ p^{\alpha} \mid n, p \leqslant \sqrt{n}}} (\alpha + 1) \cdot p^{\alpha} \cdot (p + \overline{\Omega}(n)) \ll \\
&\sum_{np \leqslant x} \overline{\Omega}(n) \cdot \sqrt{n} \cdot \ln n \ll x^{5/2} \ln x.
\end{aligned}$$

综上可知,

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leqslant x} Z(n) \cdot \overline{\Omega}(n) &= \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in A}} Z(n) \cdot \overline{\Omega}(n) + \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in B}} Z(n) \cdot \overline{\Omega}(n) + \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in C}} Z(n) \cdot \overline{\Omega}(n) = \\
&\frac{\zeta(3)\, x^3}{3 \ln x} + \sum_{i=2}^{k} \frac{a_i x^3}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1} x}\right),
\end{aligned}$$

其中,a_i($i = 1,2,\cdots,k$)为可计算的常数.

证毕.

参考文献:

[1] Kenichiro K. Comments and Topics on Smarandache Notions and Problems [M]. Aarhus: Erhus University Press,1996.

[2] Majumdar A A K. A note on the Pseudo-Smarandache function [J]. Scientia Magna, 2006, 2(3): 1 – 25.

[3] Luo Yuanbing. On the pseudo Smarandache function [J]. Scientia Magna, 2007, 3(4): 48 – 50.

[4] Cheng Lin. On the mean value of the Pseudo-Smarandache function [J]. Scientia Magna, 2007, 3(3): 97 – 100.

[5] 鲁伟阳,高丽,郝虹斐. 关于 Smarandache 双阶乘函数与伪 Smarandache 函数的混合均值 [J]. 江西科学, 2014, 32(2): 189 – 191,251.

[6] 薛社教. 一个新的算术函数及其均值 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(3): 351 – 354.

[7] Pinch R. Some properties of the Pseudo Smarandache function [J]. Scientia Magna, 2005, 1(2): 167 – 172.

[8] 马荣. Smarandache 函数及其相关问题研究 [M]. Columbus: The Educational Publisher, 2012.

[9] 潘承洞, 潘承彪. 素数定理的初等证明 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1988.

[10] Tom M. Apostol. Introduction to analytic number theory [M]. New York: Spring-Verlag, 1976.

A Hybrid Mean Value of the Pseudo-Smarandache Function

Wang Xihan, Gao Li, Lu Weiyang

(College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an 716000,China)

Abstract: For any positive integer n, the famous Pseudo-Smarandache function $Z(n)$ is defined as the smallest positive integer m such that $n \mid m(m+1)/2$, that is $Z(n) = \min\{m: n\} m(m+1)/2, m \in \mathbf{N}\}$. And for any positive integer n, the arithmetical function $\Omega(n)$ is defined as $\Omega(1) = 0$, if $n > 1$ and $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ be the factorization of n into prime powers, $\overline{\Omega}(\mathrm{n}) = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \cdots + \alpha_k p_k$. The elementary method and analytic method were performed to study the hybrid mean value problem involving the Pseudo-Smarandache function $Z(n)$ and the arithmetical function $\overline{\Omega}(n)$, and a shaper asymptotic formula was proposed.

Keywords: Pseudo-Smarandache function; arithmetical function; hybrid mean value; asymptotic formula