2004 年 11月
第 25 卷 第 6 期

固 原 师 专 学 报(自然科学)
Journal of Guyuan Teachers College (Natural Science)

Nov. 2004
Vol. 25 No. 6

关于平方余函数的四个 Diophantine 方程*

乐茂华

(湛江师范学院 数学系, 广东 湛江 524048; 梧州师范高等专科学校 数学系, 广西 贺州 542800)

摘 要: 讨论了有关 Smarandache 平方余函数的四 个Diophantine 方程的求解问题.

关键词: Smarandache 平方余函数; Diophantine 方程; 正整数解

中图分类号: O156 文献标识码: A 文章编号: 1001-0491(2004)06-0017-02

设 N 是全体正整数的集合. 对于正整数 n, 设 $SSC(n)$ 是 n 的 *Smarandache* 平方余函数, 它等于可使 mn 为平方数的最小正整数 m (参见文献[1]). 最近, *Russo*[2] 提出了有关该函数的下列方程的求解问题:

$$SSC(x) = SSC(x+1)\circ SSC(x+2),\ x\in N \tag{1}$$

$$SSC(x)\circ SSC(x+1) = SSC(x+2),\ x\in N \tag{2}$$

$$SSC(x)\circ SSC(x+1) = SSC(x+2)\circ SSC(x+3),\ x\in N \tag{3}$$

$$SSC(xy) = x^n SSC(y),\ x, y, n\in N \tag{4}$$

对此, 本文证明了以下一般性的结果:

定理 1 方程(1), (2), (3) 无解 x.

定理 2 方程(4) 的解 (x, y, n) 都满足 $n = 1$, 而且该方程有无穷多组解 (x, y, n) 适合 $n = 1$ 且使 x 和 y 是互素的无平方因子正整数.

定理 1 的证明: 设 x 是方程(1) 的解. 从(1) 可知

$$SSC(x) \equiv 0 \quad (mod\ SSC(x+1)). \tag{5}$$

根据函数 $SSC(n)$ 的定义可知

$$x \equiv 0 \quad (mod\ SSC(x)),\ x+1 \equiv 0 \quad (mod\ SSC(x+1)). \tag{6}$$

因为 $gcd(x, x+1) = 1$, 故从(6) 可知

$$gcd(SSC(x), SSC(x+1)) = 1 \tag{7}$$

于是从(5) 和(7) 可知 $SSC(x+1) = 1$, 故有

$$x+1 = z^2,\ z\in N. \tag{8}$$

当 z 是偶数时, x 是奇数, 而且 $gcd(x, x+2) = 1$. 此时

$$gcd(SSC(x), SSC(x+2)) = 1 \tag{9}$$

因为 $SSC(x+1) = 1$, 故从(1) 可知 $SSC(x) = SSC(x+2)$, 并且从(9) 可得

* 收稿日期: 2004-05-02

基金项目: 国家自然科学基金项目 (No. 10271104); 广东省自然科学基金项目 (No. 011781); 广东省教育厅自然科学研究项目 (No. 0161); 湛江市 988 科技兴湛计划项目.

作者简介: 乐茂华 (1952—), 男, 上海市人, 教授, 主要从事数论研究.

$$SSC(x)=SSC(x+2)=1.$$

由此可得
$$x=u^2,u\in N \tag{10}$$

将(10)代入(8)立得 $u^2+1=z^2$ 这一矛盾.

当 z 是奇数时,x 是偶数,而且 $gcd(x,x+2)=2$.此时从(1)可得 $SSC(x)=SSC(x+2)=2$,故有
$$x=2u^2,x+2=2v^2,u,v\in N \tag{11}$$

从(11)亦可得 $u^2+1=v^2$ 这一矛盾.综上所述可知方程(1)无解.同时可证方程(2)和(3)都无解.定理证完.

定理 2 的证明:设(x,y,n)是方程(4)的一组解,又设 $d=gcd(x,y)$.此时
$$x=da,y=bd,a,b\in N,gcd(a,b)=1 \tag{12}$$

将(12)代入(4)可得
$$SSC(xy)=SSC(d^2ab)=SSC(ab)=SSC(a)\circ SSC(b)=(da)^nSSC(db) \tag{13}$$

从(13)可知
$$SSC(a)\circ SSC(b)\equiv 0 \quad (mod\ a^n) \tag{14}$$

已知
$$a\equiv 0(mod\ SSC(a)),b\equiv 0(mod\ SSC(b)) \tag{15}$$

由于 $gcd(a,b)=1$,故从(14)可得
$$SSC(a)\equiv 0(mod\ a^n) \tag{16}$$

又因 $SSC(a)\leqslant a$,故从(16)可知 $n=1$ 且 $SSC(a)=a$.由此可知方程(4)的解(x,y,n)都满足 $n=1$,而且(12)中的 a 是无平方因子正整数.

当 x 和 y 取互素的正整数且 x 无平方因子时,必有
$$SSC(xy)=SSC(x)\circ SSC(y)=x\circ SSC(y) \tag{17}$$

从(17)可知方程(4)有无穷多组解(x,y,n)适合 $n=1$.定理证完.

参考文献:

[1] Dumitrescu C, Seleacu V. Some notions and questions in number theory[M]. Phoenix: Xiquan Pub House, 1994.

[2] Russo F. An introdution to the Smarandache square complementary function[J]. Smarandache Notions J, 2002, (13): 160-173.

[3] 华罗庚.数论导引[M].北京:科学出版社, 1979.

Four Diophantine Equations Concerning the Smarandache Square Complementary Function

Le Maohua

(Department of Mathematics, Zhanjiang Normal College, Zhanjiang Guangdong, P. R. China 524048)

Abstract: In this paper we have solved four diophantine equations concerning the Smarandache square complementary function.

Key words: Smarandache square complementary function; diophantine equation; positive integer solution.

(责任编辑 胡茂林)