第 9卷 第 23期 2009年 12月
1671-1819(2009)23-7090-04
科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering
Vol.9 No.23 Dec. 2009

关于新 Smarandache函数的部分数列

冯治宇
（宝鸡职业技术学院 基础部，宝鸡 721013）

摘 要 对任意正整数 n，设 $S_p(x)$表示不小于素数 p的 x幂的最大 m阶乘部分，$S_p^*(x)$表示不超过素数 p的 x幂的最小 m阶乘部分。利用初等方法研究了 $\{S_p(x)\}$和 $\{S_p^*(x)\}$这两个数列的性质，并给出由两个数列构成的行列式的一些特殊性质。
关键词 新 Smarandache函数 部分数列 性质研究
中图法分类号 O156.4； 文献标志码 A

1 Smarandache单值函数

对于任意的正整数 n，Smarandache函数[1] $S(n)$定义为：$S(n)=\min\{m: n|m!, m\in N\}$，在文献[2]中，Jozsef Sandor定义了提出了的 Smarandache函数，对于固定的素数 p，Smarandache单值函数定义为：

定义 1 设对固定整数 n，

$S_p(x)=\min\{m\mid m!\geqslant p^x, m\in N^+\}$，$x\in(1,\infty)$；

$S_p^*(x)=\max\{m\mid m!\leqslant p^x, m\in N^+\}$，$x\in(1,\infty)$，

其中 $k\in N^+$，称 $S_p(x)$表示不小于素数 p的 x幂的最大 m阶乘部分，亦称为上部类似于 Smarandache函数的部分数列；称 $S_p^*(x)$表示不超过素数 p的 x幂的的最小 m阶乘部分，亦成为下部类似于 Smarandache函数的部分数列。例如当 $p=2$时：$S_2^*(1)=1$，$S_2^*(2)=2$，$S_2^*(3)=3$，$S_2^*(4)=3$，$S_2^*(5)=4$，$S_2^*(6)=4$，$S_2^*(7)=5$，$S_2^*(8)=5$，$S_2^*(9)=5$，$S_2^*(10)=6$，$S_2^*(11)=6$，$S_2^*(12)=6$，$S_2^*(13)=7$，$S_2^*(14)=7$，$S_2^*(15)=7$，$S_2^*(16)=8$，$S_2^*(17)=8$，$S_2^*(18)=8$，$S_2^*(19)=9$，$S_2^*(20)=9$，$S_2^*(21)=9$，$S_2^*(22)=10$，$S_2^*(23)=10$，$S_2^*(24)=10$，……；$S_p(1)=2$，$S_p(2)=3$，$S_p(3)=4$，$S_p(4)=4$，$S_p(5)=5$，$S_p(6)=5$，$S_p(7)=6$，$S_p(8)=6$，$S_p(9)=6$，$S_p(10)=7$，$S_p(11)=7$，$S_p(12)=7$，$S_p(13)=8$，$S_p(14)=8$，$S_p(15)=8$，$S_p(16)=9$，$S_p(17)=9$，$S_p(18)=9$，$S_p(19)=10$，$S_p(20)=10$，$S_p(21)=10$，$S_p(22)=11$，$S_p(23)=11$，$S_p(24)=11$，……。

显然，对于 $m\geqslant 2$当 $x\in\left(\frac{\lg m!}{\lg p},\frac{\lg(m+1)!}{\lg p}\right]$，

$S_p(x)=m$，$x\in\left[\frac{\lg m!}{\lg p},\frac{\lg(m+1)!}{\lg p}\right)$，$S_p^*(x)=m$，（当 $m=1$没定义，因为 $0!=1!$）。

$$S_p(x)=\begin{cases} S_p^*(x)+1, & \text{if } x\in\left(\frac{\ln(m-1)!}{\ln p},\frac{\ln m!}{\ln p}\right] \quad (m\geqslant 1)\\ S_p^*(x), & \text{if } x=\frac{\ln(m-1)!}{\ln p} \quad (m\geqslant 1)\end{cases},$$

$m=1,2,3,4,\cdots$。

定义 2 m阶乘定义的 Smarandach行列式 $A(m)$和 $B(m)$[3]，即对任意的 n，$A(m)$和 $B(m)$表示 $m\times m$的行列式：

$$A(n)=\begin{vmatrix} S_p^*(1) & S_p^*(2) & \cdots & S_p^*(n)\\ S_p^*(n+1) & S_p^*(n+2) & \cdots & S_p^*(2n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ S_p^*(n^2-n+1) & S_p^*(n^2-n+2) & \cdots & S_p^*(n^2)\end{vmatrix},$$

2009年 8月 21日收到 宝鸡职业技术学院重点科研基金项目（ZK1066）资助
作者简介：冯治宇（1964—），男，陕西凤翔人，宝鸡职业技术学院讲师，研究方向：数论及数学应用。E-mail：fzy6x@163.com。

$$B(n)=\begin{vmatrix} S_p(2) & S_p(3) & \cdots & S_p(n+1) \\ S_p(n+2) & S_p(n+3) & \cdots & S_p(2n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_p(n^2-n+2) & S_p(n^2-n+3) & \cdots & S_p(n^2+1) \end{vmatrix},$$

称为 n 阶 Smarandache 行列式。

例如：

$$A_2(2)=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}=-4,\ A_2(3)=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix}=$$

$$-6,\ A_2(4)=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 6 & 6 \\ 6 & 7 & 7 & 7 \\ 8 & 8 & 8 & 9 \end{vmatrix}=9,$$

$$A_2(5)=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 6 & 6 & 7 \\ 7 & 7 & 8 & 8 & 8 \\ 9 & 9 & 9 & 10 & 10 \\ 10 & 11 & 11 & 11 & 12 \end{vmatrix}=0,\ A_2(6)=$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 \\ 8 & 8 & 8 & 9 & 9 & 9 \\ 10 & 10 & 10 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 12 & 12 & 12 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 14 & 14 & 14 & 14 \end{vmatrix}=0,$$

……。

$$B_2(2)=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=-1,\ B_2(3)=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 6 \\ 6 & 6 & 7 \end{vmatrix}=1,$$

$$B_2(4)=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 7 & 7 & 8 \\ 8 & 8 & 9 & 9 \end{vmatrix}=9$$

$$B_2(5)=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 7 & 7 \\ 7 & 8 & 8 & 8 & 9 \\ 9 & 9 & 10 & 10 & 10 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 12 \end{vmatrix}=1,$$

$$B(6)=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 \\ 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 8 \\ 8 & 8 & 9 & 9 & 9 & 10 \\ 10 & 10 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 12 & 12 & 12 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 14 & 14 & 14 & 14 & 15 \end{vmatrix}=0,$$

……。

关于这个 Smarandache 单值函数问题，许多学者进行了研究，如文献[2-4]。在本文中，利用初等方法，我们给出 $\{S_p(n)\}$ 和 $\{S_p^*(n)\}$ 这两个数列的一些重要性质；并给出这些行列式的性质，即就是证明了下面的定理：

定理 1　对于任何整数 n，我们有

无限系列 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(S_p(n))^{\alpha}}$，　$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(S_p^*(x))^{\alpha}}$

对任何 $\alpha>1$ 的实数，和是收敛的，对任何 $\alpha\leqslant 1$ 的实数，和是发散的。

定理 2　$\lg S_p(n)\sim\lg x$，$\lg S_p^*(x)\sim\lg x$ $(x\to\infty)$；

$S_p(n)\sim\frac{x\ln p}{\ln x}$，$S_p^*(x)\sim\frac{x\ln p}{\ln x}$ $(x\to+\infty)$。

定理 3　对于任意的正整数 $n\geqslant 5$，$A_2(n)=0$ 且 $B_2(n)=0$。

定理 4　对于任意的正整数 $n\geqslant 5$，$A_p(n)=0$ 且 $B_p(n)=0$。

2　定理的证明

定理 1、2 的证明：

在序列 $\{S_p(n)\}$，$(n=1,2,3,\cdots)$ 中，如果 $m!\leqslant p^x<(m+1)!$，由：$\underbrace{1}_{1!},\underbrace{2,3,4,5}_{2!},\underbrace{6,7\cdots23}_{3!}$，

$\underbrace{24,25\cdots119}_{4!},\underbrace{120,121\cdots719}_{5!},\underbrace{720,37\cdots5039}_{6!},\underbrace{5040,48\cdots40319}_{7!}$，

$\underbrace{40320,65\cdots362879}_{8!},\underbrace{362880,\cdots,3628799}_{9!},\underbrace{3628800,\cdots,39916799}_{10!}$，

$\underbrace{39916800,\cdots,479001599}_{11!},\underbrace{479001600,\cdots,6227020800}_{12!}$，

……。很容易的推断 $S_p(x)=m$，有 $\frac{\ln(m+1)!-\ln m!}{\ln p}$ 个数，因此我们可以得到：

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(S_p(n))^{\alpha}}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\ln(m+1)!-\ln m!}{\ln p\cdot m^{\alpha}}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\ln(m+1)}{m^{\alpha}\ln p} \qquad (1)$$

注意到：$m!\leqslant p^x<(m+1)!$，两边取对数，我们得到：

$$\sum_{i=1}^{m-1}\ln i< x\ln p\leqslant\sum_{i=1}^{m}\ln i。$$

由欧拉求和公式（见文献[5]中定理3.1），我们有

$$\sum_{i=1}^{m}\ln i=\int_1^{m}\ln t\,dt+\int_1^{m}(t-[t])(\ln t)'\ln t\,dt=m\ln m-m+O(\ln m) \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m-1}\ln i=\int_1^{m-1}\ln t\,dt+\int_1^{m-1}(t-[t])(\ln t)'\ln t\,dt=m\ln m-m+O(\ln m) \qquad (3)$$

结合式(2)、式(3)我们立刻得到：

$$x\ln p=m\ln m-m+O(\ln m) \qquad (4)$$

因此 $m=\frac{x\ln p}{\ln m-1}+O(1)$ (5)

结合式(1)—式(5)及P级数审敛法知：对任何$\alpha>1$的实数，和是收敛的，对任何$\alpha\leqslant 1$的实数，和是发散的，用相同的方法可以证明序列$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(S_p^*(x))^{\alpha}}$对任何$\alpha>1$的实数，和是收敛的，对任何$\alpha\leqslant 1$的实数，和是发散的，这就完成了定理1证明。

定理2的证明：

由(5)式我们有：$\ln m=\ln x+O(\ln\ln m)$ (6)

$$\ln\ln m=O(\ln\ln x) \qquad (7)$$

从而 $\lg S_p(n)\sim\lg x$，$\lg S_p^*(x)\sim\lg x(x\to+\infty)$。

由式(5)、式(6)、式(7)有

$$S_p(n)=m=\frac{x\ln p}{\ln m-1}+O(1)=\frac{x\ln p}{\ln x+O(\ln\ln m)-1}+O(1)=\frac{x\ln p}{\ln x}+x\ln p\left(\frac{O(\ln\ln m)}{\ln x(\ln x+O(\ln\ln m)-1)}\right)=\frac{x\ln p}{\ln x}+O\left(\frac{x\ln\ln x}{\ln^2 x}\right)。$$

即 $S_p(n)\sim\frac{x\ln p}{\ln x}(x\to+\infty)$。

这就完成了定理2证明。

定理3的证明：

再观察数列

$$\underbrace{1}_{1!},\ \underbrace{2,3,4,5}_{2!},\ \underbrace{6,7\cdots23}_{3!},\ \underbrace{24,25\cdots119}_{4!},\ \underbrace{120,121\cdots719}_{5!},\ \underbrace{720,37\cdots5039}_{6!},\ \underbrace{5040,48\cdots40319}_{7!},\ \underbrace{40320,65\cdots362879}_{8!},\ \cdots\cdots。$$

只是由于 $\lg S_p^*(x)\sim\lg x(x\to\infty)$ $n^2!-(n^2-n)!=(n^2-n)!(n^2-n+1)\cdots n^2-(n^2-n)!=(n^2-n)![(n^2-n+1)\cdots n^2-1]>(n-1)(n-1)^2!>(n-1)n$。

由Smarandach行列式的定义知，行列式$A(n)$一定有两行或两列相同，可以推断：

$$A(n)=\begin{vmatrix} a(1) & a(2) & \cdots & a(n)\\ a(n+1) & a(n+2) & \cdots & a(2n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a(n^2-n+1) & a(n^2-n+2) & \cdots & a(n^2)\end{vmatrix}=0。$$

故 $A(n)=0$。

定理4的证明：

观察数列

$$\underbrace{1}_{1!},\underbrace{2}_{2!},3,4,5,\underbrace{6}_{3!},7,8\ \cdots,\underbrace{24}_{4!},25,26\ \cdots119,\underbrace{120}_{5!},121,122,\cdots,\underbrace{720}_{6!},721,722\cdots,\underbrace{5040}_{7!},5041,5042,\cdots,\underbrace{40320}_{8!}\cdots\cdots。$$

由于

$$(n^2+2)-(n^2-n+1)!=(n^2-n+1)!(n^2-n+2)\cdots(n^2+2)-(n^2-n+1)!=(n^2-n+1)![(n^2-n+1)\cdots(n^2+2)-1]>(n-1)(n^2+1)!>(n-1)n。$$

行列式$B(n)$至少有两行或两列相同，可以推断：

$$B(n)=\begin{vmatrix} a(2) & a(3) & \cdots & a(n+1)\\ a(n+2) & a(n+3) & \cdots & a(2n+1)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a(n^2-n+2) & a(n^2-n+3) & \cdots & a(n^2+1)\end{vmatrix}=0$$

这就完成了定理4的证明。

参 考 文 献

1 Smarandache K. Only problems, not solutions. Chicago: Xiquan Publ House, 1993

2 Sandor J. On additive analogue of certain arithmetic functions. Smarandache Notes Journal, 2004, 14: 128—132

4 Farris M, Mitchell P. Bounding the smarandache function. Smarandache Notes Journal, 2002, 13: 37—42

5 Tom M. Apostol. Introduction to Analytic Number Theory. Springer-Verlag, New York, 1976

3 余亚辉, 蔡立翔. 关于 Smarandache素数列及其它的行列式. 纯粹数学与应用数学, 2008, 24 (4): 747—751

On the New of Smarandache Factorial Par Series

FENG Zhi-yu

(Department of basis, Baoji Vocational and Technical College, Baoji 721013, P. R. China)

[Abstract] Let n be a positive integer, $a_k(n)$ be the largest m factorial number greater than or equal to p of the m-th power, and $b_k(n)$ be the smallest m factorial number less than or equal to p of the m-th power. The main purpose is using the elementary method to study the convergent property of an infinite series involving the inferior and superior factorial part sequences, and give two sufficient condition of the convergent property of the series.

[Key words] new of Smarandache factorial par series conclusion research

(上接第 7089页)

2 Nother E. Nonclassical symmetries method. Math Phys K, l 1918, (1): 235—241

3 Ovsyannikov L V. Group analysis of differential equations. New York: Academic Press, London, 1982

4 Olver P J. Applications of Lie groups to differential equations. Berlin: Springer-Verlag, 1986

5 Clarkson P A, Mansfeid E L. Symmetry reductions and exact solutions of a class of nonlinear heat equations. Phs, 1994, D70: 250—288

6 Arrigo D J, Broadbridge P, Hill J M. Nonclassical symmetry solutions and methods of Bluman Cole and Clarkson Kruskal. J Math Phys, 1993, 3: 179—184

7 Repeta V. Conditional and Lie symmetry of nonlinear wave equation. J Nonlinea Math Phys, 1996, 3: 414—416

8 Euler N, Kohler A, Fushchych W I, L Q-symmetry gengerators and exact solutions for nonlinear heat conduction. Scientific Works, 2003, 5: 151—164

Classical Lie Symmetry Used in Burgers Equation

CHEN Wen-chao

(Taizhou Inst of Sci & Tech, NJUST, Taizhou 225300, P. R. China)

[Abstract] Symmetry analysis plays an important role in the theory of differential equations. The symmetry method for reduction of the order of ordinary differential equations and reduction of the number of independent variables for both linear and nonlinear partial differential equations is the classical Lie Symmetry method. The purpose is to persent a symmetry group to the Burgers equation $u_t(x, t) + u(x, t)u_x(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0$ by classical Lie Symmetry method. The symmetry group is of great significance to get a group-invariant solution to the Burgers equation.

[Key words] classical Lie symmetry non-classical Lie symmetry Burgers equation symmetry group infinitesimal generator