关于第 82 个 *Smarandache* 问题及其渐近性质

齐　琼　西北政法大学

【摘　要】本文利用初等数论方法研究了正整数 次根的整数部分序列的渐近性质，并得到两个的渐近公式。
【关键词】k 次根　整数部分　渐近公式

一、引言及主要结果

罗马尼亚著名的数论专家 教授在他所著《*ONLY PROBLEMS*，*NOT SOLUTIONS*》一书中提出了 105 个未解决著名的数论问题，这些问题引起了国内外许多数论学者以及数论专家的兴趣。其中第 82 个问题是“研究正整数 k 次根的整数部分序列的性质”。即对任意正整数 n，$s_k(n)$ 表示 n 的 k 次根的整数部分序列。例如，$s_k(1)=1$，$s_k(2)=1$，$s_k(3)=1$，$s_k(4)=1$，L，$s_k(2^k)=2$，$s_k(2^k+1)=2$L，$s_k(3^k)=3$，L，对于序列 $s_k(n)$，一些学者进行了初步的研究。本文利用初等数论的方法研究了该序列关于 $\sum\limits_{n\zeta x}\sigma^2$ 和 $\sum\limits_{n\zeta x}\frac{\sigma(s_k(n))}{s_k(n)}$ 的渐近性质，其中 $x>1$ 为任意实数，函数 $\sigma(n)$ 表示 n 的除数因子的和，并给出两个渐近公式。

定理 1. 对任意实数 $x>1$ 以及任意给定整数 $k>1$，有渐近公式

$$\sum_{n\zeta x}\sigma^2(s_k(n))=\frac{5k\zeta(3)}{2(k+2)}x^{1+\frac{2}{k}}+O(x^{1+\frac{1}{k}+\zeta}),$$

定理 2. 对任意实数 $x>1$ 以及任意给定整数 $k>1$，有渐近公式

$$\sum_{n\le x}\frac{\sigma(s_k(n))}{s_k(n)}=\frac{k\pi^2}{6}x+O(x^{1-\frac{1}{k}}\log^{\frac{2}{3}}x)\text{。}$$

二、定理的证明

对任意实数 $x>1$，设 M 为满足 $M^k\le x\le(M+1)^k$ 的一个给定的正整数，由 $s_k(n)$ 的定义可得：

$$\sum_{n\le x}\sigma^2(s_k(n))=\sum_{t=1}^{M}\sum_{(t-1)^k\le n\le t^k}^{n}\sigma^2(s_k(n))+\sum_{M^k\le n<x}^{n}\sigma^2(s_k(n))=\sum_{t=1}^{M-1}\sum_{(t-1)^k\le n\le t^k}^{n}\sigma^2(s_k(n))+\sum_{M^k\le n<x}^{n}\sigma^2$$

$$=\sum_{t=1}^{M-1}\left[(t+1)^k-t^k\right]\sigma^2(t)+O\left(\sum_{M^k\le n<(M+1)^k}^{n}\sigma^2(M)\right)=k\sum_{t=1}^{M}t^{k-1}\sigma^2(t)+O(M^{k+1+\varepsilon})\qquad(1)$$

由 Abel 恒等式可推出：

$$\sum_{t=1}^{M}t^{k-1}\sigma^2(t)=M^{k-1}B(M)-B(1)-(k-1)\int_1^M y^{k-2}B(y)dy$$

$$=M^{k-1}\left(\frac{5}{6}\zeta(3)M^3+O(M^2\log^2 M)\right)-(k-1)\int_1^M y^{k-2}\left(\frac{5}{6}\zeta(3)y^3+O(y^2\log^2\right.$$

$$=\frac{5\zeta(3)}{2(k+2)}M^{k+2}+O(M^{k+1}\log^2 M)\qquad(2)$$

由(1)式和(2)式可知：$\sum\limits_{n\le x}\sigma^2(s_k(n))=\frac{5\zeta(3)}{2(k+2)}M^{k+2}+O(M^{k+1+\varepsilon})$　　(3)

另一方面，注意到估计：$0\le x-M^k<(M+1)^k-M^k=x^{\frac{k-1}{k}}$　　(4)

联合(3)式和(4)式即可得到渐近公式

$$\sum_{n\le x}\sigma^2(s_k(n))=\frac{5k\zeta(3)}{2(k+2)}x^{1+\frac{2}{k}}+O(x^{1+\frac{1}{k}+\varepsilon}),$$

这样就完成了定理 1 的证明。

类似地，注意到文献 $\sum\limits_{n\le x}\frac{\sigma(n)}{n}=\frac{\pi^2}{6}x-\frac{1}{2}\log x+O(\log^{\frac{2}{3}}x)$，

既可以利用相同的方法可以得到定理 2 的结论。

参考文献：

[1] Only Problems，Not Solutions. Chicago：Xiquan Publishing House，1993

[2] Introduction to Analytic Number Theory. New York：Springer－Verlag，1976

[3] Some formulae in the analytic theory of numbers. Messenger Math. 45(1916)

[4] Weylsche Exponentialsummen in der neuren Zahlentheorie. Berlin，1963

(上接第 245 页)②建立政府政绩考核监督机制，建立舆论监督制度，政绩考核内容对社会公开，社会舆论进行全方位跟踪与监督，增加考核的透明度与真实性。③建立对政府部门失职的罚处机制。

三、小城镇生态环境保护可行性办法

1. 建立生态补偿机制。环境污染是一种社会公害，自然资源环境状况也非“公共品”污染者应有责任和义务对自己污染环境造成的损失作出赔偿；同样，环境受益者也有责任和义务对为此付出努力的地区提供适当的补偿。这一经济补偿费主要用于生态环境的保护，恢复，更新。以保证资源的持续利用。生态补偿主要可采取财政转移支付，相关项目支持及征收有关税等方式。

2. 支持企业发展循环经济。循环经济就是把传统的“资源——产品——废弃物”的直线型经济发展模式，变为“资源——产品——二次资源”的环形经济发展模式，使上一环节的废物成为下一环节的原料。政府制定税收优惠政策，对循环利用资源的企业给予税收减免，政府制定贷款低息政策，对企业进行循环利用资源的技术创新，高层次的技术攻关所需资金，发放政府贴息贷款。

3. 引导企业发展绿色制造。“绿色制造”要求在设计新产品时从材料的选择，产品的结构功能和生产加工过程设计，以及包装和运输方式等方面综合考虑资源优势和环境影响，在产品的生产制造过程中采用的生产工艺与设备最大限度地减少资源消耗和环境污染。

环境污染是人类当今面临的严重问题，它阻碍了人类经济与社会的可持续发展。加强污染防治，搞好环境保护，不仅是当今每个人、每个企业、每个国家自身利益的需要，也是每个企业、每个国家乃至整个人。