包含F.Smarandache 3n数字序列的渐近公式

呼家源，何宇，白慧

（河套学院理学系，内蒙古 巴彦淖尔 015000）

摘 要：序列$\{a_n\}=\{13,26,39,412,515,618,721,\cdots\}$称为F.Smarandache 3n数字序列，是指对任意的整数$b\in\{a_n\}$，其数字都可以分为两个部分，后一部分的数值是前一部分的三倍．本文主要研究$\frac{n}{a_n}$的均值并给出它的渐近公式．

关键词：F.Smarandache 3n数字序列；均值；渐近公式

中图分类号：O156 **文献标识码**：A **文章编号**：1511007(2016)01-0076-03

1 主要结论

对任意的整数n，著名的F.Smarandache $3n$数字序列定义为$\{a_n\}=\{13,26,39,412,515,618,721,\cdots\}$，即对任意的整数$b\in\{a_n\}$，其数字都可以分为两个部分，后一部分是前一部分的三倍．例如，$a_{28}=2884, a_{35}=35105, a_{104}=104312,\cdots$．这个序列最早是由美籍罗马尼亚数论专家Florentin Smarandache教授[1],[2]提出．在《只有问题，没有解答》一书中，他提出了105个关于算术函数、特殊序列等未解决的数学问题及猜想，并建议大家去研究其基本性质，$3n$数字序列就是其中一个．关于这个序列，一些学者已经得到一些漂亮的结论．例如，张文鹏教授提出一个猜想：F.Smarandache 3n 数字序列中不存在任何完全平方数，即方程$a_n=m^2$不存在整数解．在文献[3]中，作者研究了这个猜想并得到结论：对于一些特殊的整数n，上述方程没有整数解．然而对一般的整数n，这个猜想是否成立却仍然是一个未解决的问题．

本文将用初等的方法研究$\sum\frac{n}{a_n}$，并给出它的漂亮的渐近公式，即：

定理 对任意的实数$N>1$，有渐近公式

$$\sum_{n<N}\frac{n}{a_n}=\frac{3}{10\ln 10}\cdot\ln N+O(1).$$

2 结论证明

首先对任意的正整数n，我们令$3n=b_{k(n)}b_{k(n)-1}\cdots b_2b_1$，其中$1\le b_{k(n)}\le 9, 0\le b_i\le 9$，$i=1,2,\cdots,k(n)-1$．由$3n$数字序列$a_n$的定义，我们可以将$a_n$写为

$$a_n=n\cdot 10^{k(n)}+3n=n\cdot\left(10^{k(n)}+3\right).$$

因此

收稿日期：2015-08-28

基金项目：河套学院自然科学青年项目 HYZQ201412.

作者简介：呼家源（1986-），女，内蒙古巴彦淖尔市人，河套学院理学系讲师，西北大学数学学院在读博士，基础数学专业，主要从事数论研究．

$$\sum_{n<N}\frac{n}{a_n}=\sum_{n<N}\frac{1}{10^{k(n)}+3}$$

显然当 $N\le 3$ 时，$\sum_{n<N}\frac{n}{a_n}-\frac{3}{10}\log_{10}N$ 是常数．因此不失一般性，我们假设 $N>3$．在这种情况下，存在正整数 M 使得

$$\underbrace{33\cdots33}_{M}<N<\underbrace{33\cdots33}_{M+1} \tag{1}$$

且注意到如果对任意的正整数 n，有 $\underbrace{33\cdots33}_{u-1}<n<\underbrace{33\cdots33}_{u}$，则 $3n=b_{u(n)}b_{u-1}\cdots b_2b_1$．所以我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{n<N}\frac{n}{a_n}&=\sum_{n<N}\frac{1}{10^{k(n)}+3}=\sum_{n<3}\frac{1}{10+3}+\sum_{3<n\le 33}\frac{1}{10^2+3}+\sum_{33<n\le 333}\frac{1}{10^3+3}+\cdots+\sum_{\underbrace{33\cdots33}_{M-1}<n\le\underbrace{33\cdots33}_{M}}\frac{1}{10^M+3}+\sum_{\underbrace{33\cdots33}_{M-1}<n\le N}\frac{1}{10^{M+1}+3}\\
&=\frac{3}{10+3}+\frac{30}{10^2+3}+\frac{300}{10^3+3}+\cdots\frac{3\cdot 10^{M-1}}{10^M+3}+\frac{N-\frac{10^M-1}{3}}{10^{M+1}+3}\\
&=\frac{3}{10}\left(\frac{10}{10+3}+\frac{10^2}{10^2+3}+\frac{10^3}{10^3+3}+\cdots+\frac{10^M}{10^M+3}\right)+\frac{N-\frac{10^M-1}{3}}{10^{M+1}+3}\\
&=\frac{3}{10}\left[\left(1-\frac{3}{10+3}\right)+\left(1-\frac{3}{10^2+3}\right)+\left(1-\frac{3}{10^3+3}\right)+\cdots+\left(1-\frac{3}{10^M+3}\right)\right]+\frac{N-\frac{10^M-1}{3}}{10^{M+1}+3}\\
&=\frac{3}{10}\left[M-\left(\frac{3}{10+3}+\frac{3}{10^2+3}+\frac{3}{10^3+3}+\cdots+\frac{3}{10^M+3}\right)\right]+\frac{N-\frac{10^M-1}{3}}{10^{M+1}+3}\\
&=\frac{3}{10}M-\frac{9}{10}\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{10^i+3}+\frac{N-\frac{10^M-1}{3}}{10^{M+1}+3}\\
&=\frac{3}{10}M+O(1)
\end{aligned}\tag{2}$$

下面我们对 M 进行估值，由不等式 (1) 我们有

$$\begin{aligned}
&10^M-1<3N<10^{M+1}-1,\\
&M\ln 10+\ln\left(1-\frac{1}{10^M}\right)<\ln(3N)\le(M+1)\ln 10+\ln\left(1-\frac{1}{10^{M+1}}\right),\\
&\frac{\ln(3N)}{\ln 10}-\frac{\ln\left(1-\frac{1}{10^{M+1}}\right)}{\ln 10}-1\le M<\frac{\ln(3N)}{\ln 10}-\frac{\ln\left(1-\frac{1}{10^M}\right)}{\ln 10}
\end{aligned}$$

而当 $N\to+\infty$ 时，$\ln\left(1-\frac{1}{10^{M+1}}\right)\sim\frac{1}{10^{M+1}},\ln\left(1-\frac{1}{10^M}\right)\sim\frac{1}{10^M}$．因此 $\frac{\ln(3N)}{\ln 10}-1-O\left(\frac{1}{10^M}\right)\le M<\frac{\ln(3N)}{\ln 10}-O\left(\frac{1}{10^M}\right)$

结合等式 (2) 我们立即得到

$$\sum_{n<N}\frac{n}{a_n}=\frac{3}{10\ln 10}\cdot\ln N+O(1)$$

定理证毕.

参考文献

[1] F. Smarandaceh, Only Problems, Not Solutions[M]. Chicago, Xiquan Publishing House, 1993.

[2] M. L. Perez, Florentin Smarandache Definitions, Solved and Unsolved Problems, Conjectures and theorems in Number theory and Geometry[M]. Chicago, Xiquan Publishing House, 2000.

[3] Nan Wu, On the F. Samarandache 3n-digital sequence and the Zhang Wenpeng's conjecture[J]. Scientia Magna, 4(2008), No.4, 120-122.

[4] 张文鹏. 初等数论[M]. 西安：陕西师范大学出版社，2007.

[5] Cuncao Zhang and Yanyan Liu, On the F. Samarandache kn-digital subsequence[J]. Scientia Magna, 4(2008), No.4, 4-6.

[6] Hu Jiayuan, Zhan Han. A conjecture concerning primitive Pythagoren triple[J]. International Journal of Applied Mathematics and Statistics,2014,Vol,52,Issue No.7:38-42(EI).

[7] 呼家源，秦玮，一个包含Smarandache Ceil函数的对偶函数及Euler函数的方程及其可解性[J]. 西北大学学报（自然科学版），2013年6月，第43卷第3期：364-366.

The Asymptotic Formula of Numerical Sequence Containing F. Smarandache 3n

Hu Jiayuan, He Yu, Bai Hui

(Department of Physiology, Hetao College, Bayannur, Inner Mongolia, 015000)

Abstract: The numerical sequence called F. Smarandache 3n refers to any integer whose number can be divided into two parts. The value of the later part is three times that of the former part. This paper mainly studies the mean value and gives its asymptotic formula.

Key Words: The numerical sequence F. Smarandache 3n ; mean value; asymptotic formula

（责任编辑：降毅）