文章编号:1004-3918(2016)11-1789-05

包含Smarandache函数的混合均值

杨衍婷

(咸阳师范学院 数学与信息科学学院,陕西 咸阳 712000)

摘 要:对于任意的正整数n,函数$Z(n)$定义为最小的正整数m,使得$n\leqslant m(m+1)/2$,即$Z(n)=\min\{m:n\leqslant m(m+1)/2\}$.利用初等及解析方法,通过分区间讨论研究了Smarandache LCM函数$SL(n)$,Smarandache LCM函数的对偶函数$\overline{SL}(n)$及函数$Z(n)$的混合均值,并给出了两个有趣的渐近公式.

关键词:Smarandache LCM函数;Smarandache LCM函数的对偶函数;均值;渐近公式

中图分类号:O 156.4 **文献标识码**:A

The Hybrid Mean Values Involving Smarandache Functions

Yang Yanting

(Department of Mathematics and Information Science, Xianyang Normal University, Xianyang 712000, Shaanxi China)

Abstract: For any positive integer n, $Z(n)$ is defined as the smallest positive integer m makes $n\leqslant m(m+1)/2$. By using the elementary and analytic methods as well as dividing intervals, the hybrid mean value problems of Smarandache LCM function and the dual function of Smarandache LCM function as well as $Z(n)$ are discussed, and two interesting asymptotic formulas are given.

Key words: Smarandache LCM function; the dual function of Smarandache LCM function; mean value; asymptotic formula

1 引言及结论

对于任意的正整数n,著名的Smarandache LCM函数$SL(n)$[1]定义为最小的正整数m,使得$n\,|\,[1,2,\cdots,m]$,其中$[1,2,\cdots,m]$表示$1,2,\cdots,m$的最小公倍数.例如,$SL(n)$的前几个值为$SL(1)=1,SL(2)=2,SL(3)=3,SL(4)=4,SL(5)=5,SL(6)=3,SL(7)=7,SL(8)=8,SL(9)=9,SL(10)=5,\cdots$.当$n>1$,并且$n$的标准分解式为$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$时,$SL(n)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{p_i^{\alpha_i}\}$.关于$SL(n)$的性质,许多学者进行了研究,取得了不少重要的结果[2-10].例如,杨明顺[2]研究了Smarandache函数与Smarandache LCM函数的混合均值问题,得到了渐近公式$\sum\limits_{n\leqslant x}\frac{S(n)}{SL(n)}=x+O\left(\frac{x\ln\ln x}{\ln x}\right)$.Lv Zhongtian[3]研究了$SL(n)$的均值性质,给出了渐近公式$\sum\limits_{n\leqslant x}SL(n)=\frac{\pi^2x^2}{12\ln x}+\sum\limits_{i=2}^{k}\frac{b_ix^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right)$,其中$b_i(i=2,3,\cdots,k)$是可计算的常数.张利霞和赵西卿[6]讨论了关于Smarandache LCM函数的β次混合均值,给出了渐近公式$\sum\limits_{n\leqslant x}(SL(n)-P(n))^{\beta}=\frac{2}{2\beta+1}\zeta\left(\frac{2\beta+1}{2}\right)\frac{x^{\frac{2\beta+1}{2}}}{\ln x}+\sum\limits_{i=2}^{k}\frac{c_ix^{\frac{2\beta+1}{2}}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{2\beta+1}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right)$,其中$P(n)$是最大素因子函数,$c_i(i=2,3,\cdots,k)$是可计算常数.贺艳峰和潘晓玮[10]研究了包含Smarandache LCM函数的方程$\sum\limits_{d|n}SL(d)=n$的正

收稿日期:2016-08-12
基金项目:国家自然科学基金项目(61501388);咸阳师范学院科研基金项目(13XSYK007)
作者简介:杨衍婷(1985-),女,讲师,硕士,主要研究方向为数论与代数.

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

整数解.

设 n 为正整数,Smarandache LCM函数的对偶函数 $\overline{SL}(n)$ [1]定义为:$\overline{SL}(1)=1$,当 $n>1$,并且 n 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 时,有 $\overline{SL}(n)=\min_{1\leqslant i\leqslant k}\left\{p_i^{\alpha_i}\right\}$. 这个函数的前几项为 $\overline{SL}(1)=1$, $\overline{SL}(6)=2$, $\overline{SL}(12)=3$, $\overline{SL}(20)=4,\cdots$. 关于 $\overline{SL}(n)$ 的性质,许多学者也进行了研究,取得了有趣的结果[11-16]. 例如,闫天国等[11]研究了关于Smarandache LCM对偶函数方程 $\sum_{d\mid n}\overline{SL}(d)=n$ 的正整数解. 闫晓霞[15]研究了Smarandache LCM函数的对偶函数 $SL(n)$ 与最小素因子函数 $p(n)$ 的均方值,给出了渐近公式 $\sum_{n\leqslant x}(\overline{SL}(n)-p(n))^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i x^{\frac{5}{2}}}{\ln^i x}+O(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^{k+1}x})$,其中,$c_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是可计算的常数且 $c_1=\frac{4}{5}$.

函数 $Z(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n\leqslant m(m+1)/2$,即

$$Z(n)=\min\left\{m:n\leqslant m(m+1)/2\right\}.$$

它是由罗马尼亚数论专家Jozsef Sandor教授引入的. 本文研究复合函数 $SL(Z(n))\cdot\overline{SL}(Z(n))$ 及 $\frac{\overline{SL}(Z(n))}{SL(Z(n))}$ 的均值问题,并给出两个有趣的渐近公式.

定理1 对于任意的实数 $x>1$,有如下的渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}SL(Z(n))\cdot\overline{SL}(Z(n))=\frac{2x^2}{\ln 2x}+O(\frac{x^2}{\ln^2 x}).$$

定理2 对于任意的实数 $x>1$,有如下的渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\overline{SL}(Z(n))}{SL(Z(n))}=\frac{2x}{\ln 2x}+O(\frac{x\ln\ln x}{\ln^2 x}).$$

2 引理

引理1 对于任意的实数 $x>1$,p 为素数,有

$$\pi(x)=\sum_{p\leqslant x}1=\frac{x}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i x}{\ln^i x}+O(\frac{x}{\ln^{k+1}x}),$$

其中 $a_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数.

证明 参阅文献[17].

引理2 对于任意的实数 $x>1$,p 为素数,有

$$\sum_{p\leqslant x}p=\frac{x^2}{2\ln x}+O(\frac{x^2}{\ln^2 x}),\quad \sum_{p\leqslant x}p^3=\frac{x^4}{4\ln x}+O(\frac{x^4}{\ln^2 x}).$$

证明 由Abel恒等式[18-19]以及引理1得

$$\sum_{p\leqslant x}p=\pi(x)x-\int_{\frac{3}{2}}^{x}\pi(t)\mathrm{d}t=(\frac{x^2}{\ln x}+O(\frac{x^2}{\ln^2 x}))-\int_{\frac{3}{2}}^{x}(\frac{t}{\ln t}+O(\frac{t}{\ln^2 t}))\mathrm{d}t=\frac{x^2}{2\ln x}+O(\frac{x^2}{\ln^2 x}).$$

类似地,

$$\sum_{p\leqslant x}p^3=\pi(x)x^3-\int_{\frac{3}{2}}^{x}\pi(t)\cdot 3t^2\mathrm{d}t=(\frac{x^4}{\ln x}+O(\frac{x^4}{\ln^2 x}))-\int_{\frac{3}{2}}^{x}(\frac{3t^3}{\ln t}+O(\frac{t^3}{\ln^2 t}))\mathrm{d}t=\frac{x^4}{4\ln x}+O(\frac{x^4}{\ln^2 x}).$$

引理3 对于任意的实数 $x>1$,p 为素数,有

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}=\ln\ln x+A+O(\frac{1}{\ln x}).$$

证明 参阅文献[18].

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

3 定理的证明

注意到，如果 $Z(n)=m$，那么当 $\frac{(m-1)m}{2}+1\leqslant n\leqslant\frac{m(m+1)}{2}$ 时，都有 $Z(n)=m$，即方程 $Z(n)=m$ 有 m 个解 $n=\frac{(m-1)m}{2}+1, n=\frac{(m-1)m}{2}+2,\cdots,n=\frac{m(m+1)}{2}$．由于 $n\leqslant x$，所以当 $Z(n)=m$ 时，m 满足 $1\leqslant m\leqslant\frac{\sqrt{8x+1}-1}{2}$．

将所有小于或等于 $\sqrt{2x}$ 的正整数m分为3种情况讨论：$A=\left\{m:\omega(m)=1,m\leqslant\sqrt{2x}\right\}$，$B=\left\{m:\omega(m)=2,m\leqslant\sqrt{2x}\right\}$，$C=\left\{m:\omega(m)\geqslant 3,m\leqslant\sqrt{2x}\right\}$，其中 $\omega(m)$ 表示 m 的所有不同素因子的个数．

定理1证明

注意到，当 $m\in A$ 时，$m\cdot SL(m)\cdot\overline{SL}(m)=m^3\ll x^{\frac{3}{2}}$，当 $m\in B$ 时，$m\cdot SL(m)\cdot\overline{SL}(m)\leqslant m^2\ll x$，当 $m\in C$ 时，$m\cdot SL(m)\cdot\overline{SL}(m)\leqslant m^2\ll x$．从而可得

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ Z(n)=m}}SL(Z(n))\cdot\overline{SL}(Z(n))=$$

$$\sum_{m\in A}m\cdot SL(m)\cdot\overline{SL}(m)+O(x^{\frac{3}{2}})+\sum_{m\in B}m\cdot SL(m)\cdot\overline{SL}(m)+O(x)+\sum_{m\in C}m\cdot SL(m)\cdot\overline{SL}(m)+O(x)．$$

由引理2可得

$$\sum_{m\in A}m\cdot SL(m)\cdot\overline{SL}(m)=\sum_{p\leqslant\sqrt{2x}}p^3+\sum_{\substack{p^\alpha\leqslant\sqrt{2x}\\ \alpha\geqslant 2}}p^{3\alpha}=\frac{2x^2}{\ln 2x}+O(\frac{x^2}{\ln^2 x})+O(\sum_{2\leqslant\alpha\leqslant\ln x}\sum_{p\leqslant(2x)^{\frac{1}{2\alpha}}}p^{3\alpha})=$$

$$\frac{2x^2}{\ln 2x}+O(\frac{x^2}{\ln^2 x})+O(\sum_{2\leqslant\alpha\leqslant\ln x}x^{\frac{3}{2}+\frac{1}{4}})=\frac{2x^2}{\ln x}+O(\frac{x^2}{\ln^2 x})．$$

对于 $m\in B$，有 $m=p^\alpha q^\beta$（p,q 为不同的素数），不妨设 $p^\alpha<q^\beta$，由引理3可得

$$\sum_{m\in B}m\cdot SL(m)\cdot\overline{SL}(m)=\sum_{p^\alpha\leqslant(2x)^{\frac{1}{4}}}\sum_{p^\alpha<q^\beta\leqslant\frac{\sqrt{2x}}{p^\alpha}}p^{2\alpha}q^{2\beta}\ll\sum_{p^\alpha\leqslant(2x)^{\frac{1}{4}}}\sum_{q\leqslant\frac{\sqrt{2x}}{p^\alpha}}p^{2\alpha}\cdot\frac{x}{p^{2\alpha}}\ll$$

$$\sum_{p^\alpha\leqslant(2x)^{\frac{1}{4}}}x\cdot\frac{\sqrt{x}}{p^\alpha}\ll\sum_{p\leqslant(2x)^{\frac{1}{4}}}\frac{1}{p}\cdot x^{\frac{3}{2}}+\sum_{\substack{p^\alpha\leqslant(2x)^{\frac{1}{4}}\\ \alpha\geqslant 2}}\frac{1}{p^\alpha}\cdot x^{\frac{3}{2}}\ll x^{\frac{3}{2}}\ln\ln x．$$

对于 $m\in C$，以 $\omega(m)=3$ 为例，不妨设 $m=p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\gamma$ 且 $p_1^\alpha<p_2^\beta<p_3^\gamma$，由 $m\in B$ 的估计方法及引理3有

$$\sum_{\substack{m=p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\gamma\leqslant\sqrt{2x}\\ p_1^\alpha<p_2^\beta<p_3^\gamma}}m\cdot SL(m)\cdot\overline{SL}(m)=\sum_{p_1^\alpha\leqslant(2x)^{\frac{1}{6}}}\sum_{p_1^\alpha<p_2^\beta\leqslant\frac{(2x)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{p_1^\alpha}}}\sum_{p_2^\beta<p_3^\gamma\leqslant\frac{\sqrt{2x}}{p_1^\alpha p_2^\beta}}p_1^{2\alpha}p_2^\beta p_3^{2\gamma}\ll$$

$$\sum_{p_1^\alpha\leqslant(2x)^{\frac{1}{6}}}\sum_{p_1^\alpha<p_2^\beta\leqslant\frac{(2x)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{p_1^\alpha}}}\frac{p_1^{2\alpha}p_2^\beta x}{p_1^{2\alpha}p_2^{2\beta}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{p_1^\alpha p_2^\beta}\ll x^{\frac{3}{2}}\ln\ln x．$$

注意到正整数 $m\in C$ 的所有不同素因子的个数 $\omega(m)\ll\ln\ln m$，于是反复应用上式，不难推出估计式

$$\sum_{m\in C}m\cdot SL(m)\cdot\overline{SL}(m)\ll\sum_{\substack{m\leqslant\sqrt{2x}\\ 3\leqslant\omega(m)\leqslant\ln\ln x}}m\cdot SL(m)\cdot\overline{SL}(m)\ll\sum_{3\leqslant k\leqslant\ln\ln x}\sum_{\substack{m\leqslant\sqrt{2x}\\ \omega(m)=k}}m\cdot SL(m)\cdot\overline{SL}(m)\ll x^{\frac{3}{2}}(\ln\ln x)^2．$$

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

从而，

$$\sum_{n\leqslant x} SL(Z(n))\cdot \overline{SL}(Z(n))=\frac{2x^2}{\ln 2x}+O(\frac{x^2}{\ln^2 x}).$$

定理2证明

注意到，对任意的正整数 $m\leqslant\sqrt{2x}$，有 $\frac{\overline{SL}(m)\cdot m}{SL(m)}\leqslant m\ll\sqrt{x}$. 从而可得

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ Z(n)=m}}\frac{\overline{SL}(Z(n))}{SL(Z(n))}=\sum_{m\in A}\frac{\overline{SL}(m)}{SL(m)}\cdot m+\sum_{m\in B}\frac{\overline{SL}(m)}{SL(m)}\cdot m+\sum_{m\in C}\frac{\overline{SL}(m)}{SL(m)}\cdot m+O(\sqrt{x}).$$

由引理2，

$$\sum_{m\in A}\frac{\overline{SL}(m)}{SL(m)}\cdot m=\sum_{p\leqslant\sqrt{2x}}p+\sum_{\substack{p^\alpha\leqslant\sqrt{2x}\\ \alpha\geqslant 2}}p^\alpha=\frac{2x}{\ln 2x}+O(\frac{x}{\ln^2 x})+O(\sum_{2\leqslant\alpha\leqslant\ln x}\ \sum_{p\leqslant(2x)^{\frac{1}{2\alpha}}}p^\alpha)=$$

$$\frac{2x}{\ln 2x}+O(\frac{x}{\ln^2 x})+O(x^{\frac{3}{4}}\ln x)=\frac{2x}{\ln 2x}+O(\frac{x}{\ln^2 x}).$$

由引理1，

$$\sum_{m\in B}\frac{\overline{SL}(m)}{SL(m)}\cdot m=\sum_{\substack{p^\alpha q^\beta\leqslant\sqrt{2x}\\ p^\alpha<q^\beta}}p^{2\alpha}=\sum_{p^\alpha\leqslant(2x)^{\frac14}}\ \sum_{p^\alpha<q^\beta\leqslant\frac{\sqrt{2x}}{p^\alpha}}p^{2\alpha}\ll\sum_{p^\alpha\leqslant(2x)^{\frac14}}p^\alpha\cdot\frac{\sqrt{x}}{\ln\frac{\sqrt{x}}{p^\alpha}}\ll$$

$$\sum_{p^\alpha\leqslant(2x)^{\frac14}}p^\alpha\cdot\frac{\sqrt{x}}{\ln x}\ll\sum_{p\leqslant(2x)^{\frac14}}\frac{\sqrt{x}}{\ln x}\cdot x^{\frac14}\ll\frac{x}{\ln^2 x}.$$

对于 $m\in C$，以 $\omega(m)=3$ 为例，不妨设 $m=p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\gamma$ 且 $p_1^\alpha<p_2^\beta<p_3^\gamma$，由 $m\in B$ 的估计方法及引理1，有

$$\sum_{\substack{m=p_1^\alpha p_2^\beta p_3^\gamma\leqslant\sqrt{2x}\\ p_1^\alpha<p_2^\beta<p_3^\gamma}}\frac{\overline{SL}(m)}{SL(m)}\cdot m=\sum_{p_1^\alpha\leqslant(2x)^{\frac16}}\ \sum_{p_1^\alpha<p_2^\beta\leqslant\frac{(2x)^{\frac14}}{\sqrt{p_1^\alpha}}}\ \sum_{p_2^\beta<p_3^\gamma\leqslant\frac{\sqrt{2x}}{p_1^\alpha p_2^\beta}}p_1^{2\alpha}p_2^\beta\ll$$

$$\sum_{p_1^\alpha\leqslant(2x)^{\frac16}}\ \sum_{p_1^\alpha<p_2^\beta\leqslant\frac{(2x)^{\frac14}}{\sqrt{p_1^\alpha}}}p_1^{2\alpha}p_2^\beta\cdot\frac{\frac{\sqrt{x}}{p_1^\alpha p_2^\beta}}{\ln\frac{\sqrt{x}}{p_1^\alpha p_2^\beta}}\ll\sum_{p_1^\alpha\leqslant(2x)^{\frac16}}\ \sum_{p_1^\alpha<p_2^\beta\leqslant\frac{(2x)^{\frac14}}{\sqrt{p_1^\alpha}}}p_1^\alpha\cdot\frac{\sqrt{x}}{\ln x}\ll$$

$$\sum_{p_1^\alpha\leqslant(2x)^{\frac16}}\frac{\sqrt{x}}{\ln^2 x}\cdot x^{\frac14}\cdot\sqrt{p_1^\alpha}\ll\frac{\sqrt{x}\cdot x^{\frac14}\cdot x^{\frac16}\cdot x^{\frac{1}{12}}}{\ln^3 x}\ll\frac{x}{\ln^2 x}.$$

注意到正整数 $m\in C$ 的所有不同素因子的个数 $\omega(m)\ll\ln\ln m$，于是反复应用上式，不难推出估计式

$$\sum_{m\in C}\frac{\overline{SL}(m)}{SL(m)}\cdot m\ll\sum_{\substack{m\leqslant\sqrt{2x}\\ 3\leqslant\omega(m)\leqslant\ln\ln x}}\frac{\overline{SL}(m)}{SL(m)}\cdot m\ll\sum_{3\leqslant k\leqslant\ln\ln x}\ \sum_{\substack{m\leqslant\sqrt{2x}\\ \omega(m)=k}}m\cdot\frac{\overline{SL}(m)}{SL(m)}\ll\frac{x\ln\ln x}{\ln^2 x}.$$

从而，

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\overline{SL}(Z(n))}{SL(Z(n))}=\frac{2x}{\ln 2x}+O(\frac{x\ln\ln x}{\ln^2 x}).$$

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　　http://www.cnki.net

参考文献：

[1] Smarandache F. Only problems，not solutions[M]. Chicago：Xiquan Publishing House，1993.
[2] 杨明顺. 关于Smarandache及Smarandache LCM函数的混合均值[J]. 西北大学学报：自然科学版，2010，40(5)：772-773.
[3] Lv Zhongtian. On the F.Smarandache LCM function and its mean value[J]. Scientia Magna，2007，3(1)：22-25.
[4] 朱　民. 一个包含有F.Smarandache LCM 函数SL(n)的混合均值[J]. 西南民族大学学报：自然科学版，2013，39(4)：564-566.
[5] 赵　琴，高　丽，艾　轮. 关于F.Smarandache LCM 函数的一个均值分布[J]. 河南科学，2016，34(1)：7-10.
[6] 张利霞，赵西卿. 关于Smarandache LCM 函数的 β 次混合均值[J]. 湖北大学学报：自然科学版，2016，38(4)：315-317.
[7] 张利霞，赵西卿，韩建勤. 关于Smarandache LCM 函数的一个下界估计[J]. 河南科学，2015，33(8)：1291-1293.
[8] 张利霞，赵西卿，郭　瑞，等. 关于数论函数方程 $S(SL(n))=\varphi(n)$ 的可解性[J]. 纯粹数学与应用数学，2015，31(5)：533-536.
[9] 朱伟义. 一个包含F.Smarandache LCM 函数的猜想[J]. 数学学报：中文版，2008，51(5)：955-958.
[10] 贺艳峰，潘晓玮. 一个包含Smarandache LCM 函数的方程[J]. 数学学报：中文版，2008，51(4)：779 -786.
[11] 闫天国，王巧玲，徐小凡. 关于Smarandache LCM对偶函数的一个方程[J]. 西南民族大学学报：自然科学版，2013，39(4)：570-574.
[12] 高　丽，马娅锋. 一个包含Smarandache LCM对偶函数的方程[J]. 湖北大学学报：自然科学版，2015，37(4)：367-371.
[13] 赵娜娜. 一个关于Smarandache LCM对偶函数的方程[J]. 纺织高校基础科学学报，2013，26(3)：323-327.
[14] 王　妤. 一个包含Smarandache LCM对偶函数的方程[J]. 黑龙江大学自然科学学报，2008，25(5)：645-647.
[15] 闫晓霞. Smarandache LCM的对偶函数与最小素因子函数的均方值[J]. 纺织高校基础科学学报，2010，23(3)：323-325.
[16] 闫晓霞. Smarandache LCM函数与其对偶函数的混合均值[J]. 内蒙古师范大学学报：自然科学汉文版，2010，39(3)：229-231.
[17] 潘承洞，潘承彪. 素数定理的证明[M]. 上海：上海科学技术出版社，1988.
[18] Tom M Apostol. Introduction to analytical number theory [M]. New York：Springer-Verlag，1976.
[19] 潘承洞，潘承彪. 解析数论基础[M]. 北京：科学出版社，1988.

（编辑　张松林）

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net