第 35 卷 第 3 期
2017 年 6 月

贵州师范大学学报(自然科学版)
Journal of Guizhou Normal University (Natural Sciences)

Vol. 35. No. 3
Jun. 2017

文章编号:1004—5570(2017)03 - 0055 - 04

包含伪 Smarandache 函数与欧拉函数的两个方程

赵祈芬,高　丽*

(延安大学 数学与计算机科学学院,陕西 延安　716000)

摘要: 利用初等方法以及伪 Smarandache 函数和 Euler 函数的性质,讨论了两个数论函数方程 $Z(n^k) = \varphi(n^2)$ 与 $Z(n^k) = \varphi(n^k)$ 的可解性问题,并求出所有正整数解。

关　键　词: 伪 Smarandache 函数; Euler 函数; 方程; 正整数解

中图分类号: O156.4　　**文献标识码:** A

DOI:10.16614/j.cnki.issn1004-5570.2017.03.008

Two equations involving the pseudo - Smarandache function and Euler function

ZHAO Qifen ,GAO Li

(College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an,Shaanxi 716000 China)

Abstract: The main purpose of this paper is to study the solvability of two equations stand by using elementary methods and the properties of the Pseudo - Smarandache function and the Euler function. All positive integer solutions of them are given.

Key words: pseudo - Smarandache function ; Euler function ; equation ; integer solution

0　引言

对任意正整数 n,伪 Smarandache 函数[1] $Z(n)$ 被定义为最小的正整数 m 使得 $1 + 2 + \cdots + m$ 被 n 整除,即 $Z(n) = \min\left\{m: m \in \mathbf{N}, n \mid \frac{m(m+1)}{2}\right\}$。$\varphi(n)$ 为欧拉函数,它表示小于 n 而且与 n 互素的所有正整数的个数。从 $Z(n)$ 的定义可以计算出 $Z(n)$ 的前几个值为: $Z(1) = 1, Z(2) = 3, Z(3) = 3, Z(4) = 7, Z(5) = 4, Z(6) = 3, Z(7) = 6, Z(8) = 15, Z(9) = 8, Z(10) = 4, Z(11) = 10, \cdots$。关于 $Z(n)$ 的初等性质,许多学者已进行了研究,并获得了不少有意义的结果。例如,Majumdar A. A. K. [2,3] 得到关于 $Z(n)$ 的如下结论:

对任意素数 $p \geqslant 3, Z(p) = p - 1$;

对任意素数 $p \geqslant 3, k \in \mathbf{N}, Z(p^k) = p^k - 1$;

对任意 $k \in \mathbf{N}, Z(2^k) = p^{k+1} - 1$。

张爱玲[4]研究了方程 $\sum_{n=1}^{m} Z(n) = \frac{m(m+1)}{2}$ 成立当且仅当 $n = 1,3$。

Kenichiro Kashihhara 在文献[5]中论述了函数 $Z(n)$ 的一些初等性质,同时也提出了下面两个问题:

收稿日期:2017 - 02 - 28

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11471007);陕西省科技厅科学技术研究发展计划项目(2013JQ1019)延安大学校级科研计划项目——引导项目(YD2014 - 05)

* 通讯作者:高　丽(1966 -),女,硕士研究生导师,研究方向:数论,E - mail:yadxgl@163.com

(A) 求方程 $Z(n)=\varphi(n)$ 的所有正整数解;

(B) 求方程 $Z(n)+1=\varphi(n)$ 的所有正整数解。

张文鹏[6]教授提出了关于 F. Smarandache 函数的相关问题,其中包括求 $Z(n)=\varphi(n)$ 的所有正整数解的问题。

范盼红[7]在《对 Catalan 数的性质以及关于 Smarandache 函数的几个方程的研究》中利用初等方法对此问题进行了研究,并给出了方程 $Z(n)=\varphi(n)$ 的解有如下形式:

① $n=p$,其中 p 为素数;

② $n=2p$,其中 $p\equiv 1(\mathrm{mod}4)$;

③ $n=2^k p$,其中 $p\equiv 1(\mathrm{mod}4)$,且 $p\mid(2^{k-1}-1)$。

鲁伟阳在文献[8]中研究了 $Z(n^2)=\varphi(n)$ 的所有正整数解的问题。

高丽在文献[9]中研究了两个数论函数方程 $Z(n^k)=\varphi(n)$ 与 $Z(n)+\varphi(n)=2n$ 的可解性问题。

其它有关伪 Smarandache 函数的研究工作可参阅文献[10-15]。

我们前期已经对方程 $Z(n^2)=\varphi(n^2)$ 的可解性问题进行了研究。在此基础上,本文利用初等方法讨论两个方程 $Z(n^k)=\varphi(n^2)$ 与 $Z(n^k)=\varphi(n^k)$ 的可解性问题,并给出其所有正整数解。

1 基本定义及引理

定义1[16] 伪 Smarandache 函数 $Z(n)$:最小的正整数 m 使得 n 整除 $\frac{m(m+1)}{2}$,即 $Z(n)=\min\left\{m: m\in\mathbf{N}, n\mid\frac{m(m+1)}{2}\right\}$。

定义2[17] Euler 函数 $\varphi(n)$:不大于 n 且与 n 互素的正整数的个数。

引理1[17] Euler 函数为积性函数,即对于任意互素的正整数 m 和 n,则有

$\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n)$。

引理2[17] 设 $n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_s^{k_s}$ 是正整数 n 的标准分解式,则有

$$\varphi(n)=\prod_{i=1}^{k}p_i^{k_i-1}(p_i-1)。$$

引理3[17] 对于素数 p 与 $k\geqslant 1$,有 $\varphi(p^k)=p^k-p^{k-1}$。

引理4[17] 对任意素数 $p\geqslant 3$,$Z(p)=p-1$。

引理5[17] 对任意素数 $p\geqslant 3$ 及 $k\in\mathbf{N}$,$Z(P^k)=p^k-1$. 当 $p=2$ 时,则有

$Z(2^k)=2^{k+1}-1$。

引理6[17] $Z(n)$ 是不可加的,即 $Z(m+n)$ 不恒等于 $Z(m)+Z(n)$;$Z(n)$ 也不是可乘的,即 $Z(mn)$ 不恒等于 $Z(m)Z(n)$。

2 主要结论及证明

定理1 对任意正整数 $n>1$ 和 $k\geqslant 2$,函数方程

$$Z(n^k)=\varphi(n^2) \tag{1}$$

仅有正整数解 $n=1$。

下面提到的 p, p_i 均为素数。

证明 用初等方法给出定理的直接证明。

对正整数 n 进行分类讨论。

(Ⅰ) 当 n 为奇数时,我们分为以下几种情况讨论:

(i) $n=1$,$Z(1)=1=\varphi(1)$,所以 $n=1$ 是方程(1)的解。

(ii) $n=p$,其中 p 为素数,且 $p\geqslant 3$,$Z(p^k)=p^k-1$,$\varphi(p^2)=p^2-p$,当 $k\geqslant 2$ 时,有 $p^k-1\neq p^2-p$,即 $Z(n^k)\neq\varphi(n^2)$,所以 $n=p$ 不是方程(1)的解。

(iii) $n=p^\alpha$,其中 p 为素数,且 $p\geqslant 3$, $k>1$,$Z(p^{k\alpha})=p^{k\alpha}-1$,$\varphi(p^{2\alpha})=p^{2\alpha}-p^{2\alpha-1}$,当 $k\geqslant 2$ 时有 $p^{k\alpha}-1\neq p^{2\alpha}-p^{2\alpha-1}$,即 $Z(n^k)\neq\varphi(n^2)$,所以 $n=p^\alpha$ 不是方程(1)的解。

(iv) $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$,(其中 $p_1, p_2,\cdots p_s$ 均大于3,$\alpha_i\geqslant 1, 0\leqslant i\leqslant s, s\geqslant 2$),$\varphi(n^2)=p_1^{2\alpha_1-1}p_2^{2\alpha_2-1}\cdots p_s^{2\alpha_s-1}(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_s-1)$,如果 $Z(n^k)=\varphi(n^2)$,根据 $Z(n)$ 的定义可得

$$n^k\mid\frac{\varphi(n^2)[\varphi(n^2)+1]}{2},$$

即

$$p_1^{k\alpha_1}p_2^{k\alpha_2}\cdots p_s^{k\alpha_s}\mid p_1^{2\alpha_1-1}p_2^{2\alpha_2-1}\cdots p_s^{2\alpha_s-1}(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_s-1)$$

亦即

$$p_1^{(k-2)\alpha_1+1}p_2^{(k-2)\alpha_2+1}\cdots p_s^{(k-2)\alpha_s+1}\mid(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_s-1)$$

显然不成立,所以 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 不是方程

(1)的解。

(Ⅱ)当 n 为偶数时,我们分为以下几种情况讨论:

(i) $n = 2^{\alpha}$,其中 $\alpha > 0$,$Z(2^{k\alpha}) = 2^{k\alpha+1} - 1$,$\varphi(2^{2\alpha}) = 2^{2\alpha-1}$,则 $2^{k\alpha+1} - 1 \neq 2^{2\alpha-1}$,即 $Z(n^2) \neq \varphi(n^k)$,所以 $n = 2^{\alpha}$ 不是方程(1)的解。

(ii) $n = 2^{\alpha}p^{l}$,其中 $\alpha > 0$,$p \geqslant 3$,$l \geqslant 1$,$\varphi(2^{2\alpha}p^{2l}) = \varphi(2^{2\alpha})\varphi(p^{2l}) = 2^{2\alpha-1}p^{2l-1}(p-1)$,如果 $Z(n^k) = \varphi(n^2)$,根据 $Z(n)$ 的定义可得 $n^k \mid \dfrac{\varphi(n^2)[\varphi(n^2)+1]}{2}$,

即

$$2^{k\alpha}p^{kl} \mid \frac{2^{2\alpha-1}p^{2l-1}(p-1)[2^{2\alpha-1}p^{2l-1}(p-1)+1]}{2}$$

亦即

$$2^{(k-2)\alpha+1}p^{(k-2)l+1} \nmid \frac{(p-1)[2^{2\alpha-1}p^{2l-1}(p-1)+1]}{2}$$

又 $(2,p) = 1$,$2^{(k-2)\alpha+1} \nmid \dfrac{(p-1)[2^{2\alpha-1}p^{2l-1}(p-1)+1]}{2}$,

$$p^{(k-2)l+1} \nmid \frac{(p-1)[2^{2\alpha-1}p^{2l-1}(p-1)+1]}{2}$$

即

$$2^{(k-2)\alpha+1}p^{(k-2)l+1} \nmid \frac{(p-1)[2^{2\alpha-1}p^{2l-1}(p-1)+1]}{2}$$

所以 $2^{(k-2)\alpha+1}p^{(k-2)l+1} \mid \dfrac{(p-1)[2^{2\alpha-1}p^{2l-1}(p-1)+1]}{2}$ 不成立,所以 $n = p_1p_2\cdots p_s$ 不是方程(1)的解。

(iii) $n = 2^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$,其中 $p_1,p_2,\cdots p_s$ 均大于3,$\alpha,\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_s \geqslant 1$,$s \geqslant 2$。令 $n = 2^{\alpha_0}m$,$2 \nmid m$,由于 $(2^{\alpha_0},m) = 1$,则 $\varphi(n^2) = 2^{2\alpha_0-1}\varphi(m^2)$,如果 $Z(n^k) = \varphi(n^2)$,根据 $Z(n)$ 的定义可得

$$n^k \mid \frac{\varphi(n^2)[\varphi(n^2)+1]}{2},$$

即

$$2^{k\alpha_0}m^k \mid 2^{2\alpha_0-2}\varphi(m^2)[2^{2\alpha_0-1}\varphi(m^2)+1]$$

又 $(2^{k\alpha_0},m^k) = 1$,$2^{k\alpha_0} \nmid 2^{2\alpha_0-2}\varphi(m^2)[2^{2\alpha_0-1}\varphi(m^2)+1]$,$m^k \nmid 2^{2\alpha_0-2}\varphi(m^2)[2^{2\alpha_0-1}\varphi(m^2)+1]$

所以 $2^{k\alpha_0}m^k \nmid 2^{2\alpha_0-2}\varphi(m^2)[2^{2\alpha_0-1}\varphi(m^2)+1]$,得出矛盾,所以 $n = 2^kp_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_s^{k_s}$ 不是方程(1)的解。

综上所述,方程(1)仅有正整数解 $n = 1$。

定理2 对任意的正整数 n 和 $k \geqslant 2$,函数方程

$$Z(n^k) = \varphi(n^k) \tag{2}$$

仅有正整数解 $n = 1$。

下面提到的 p,p_i 均为素数。

证明 用初等方法给出定理的直接证明。

对正整数 n 进行分类讨论。

(I) n 为奇数时,我们分为以下几种情况讨论:

(i)当 $n = 1$ 时,$Z(1) = 1 = \varphi(1)$,所以 $n = 1$ 是方程(2)的解。

(ii)当 $n = p$(其中p为素数且 $p \geqslant 3$)时,$Z(p^k) = p^k - 1$,$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$,则 $p^k - 1 \neq p^k - p^{k-1}$,即 $Z(n^k) \neq \varphi(n^k)$,所以 $n = p$ 不是方程(2)的解。

(iii)当 $n = p^{\alpha}$(其中p为素数且 $p \geqslant 3$,$\alpha > 1$)时,$Z(p^{\alpha k}) = p^{\alpha k} - 1$,$\varphi(p^{\alpha k}) = p^{\alpha k} - p^{\alpha k-1}$,当 $k \geqslant 2$ 时有 $p^{\alpha k} - 1 \neq p^{\alpha k} - p^{\alpha k-1}$,即 $Z(p^{\alpha k}) \neq \varphi(p^{\alpha k})$,即 $Z(n^k) \neq \varphi(n^k)$,所以 $n = p^{\alpha}$ 不是方程(2)的解。

(iv)当 $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$(其中 $p_1,p_2,\cdots p_s$ 均大于2,$\alpha_i \geqslant 1$,$0 \leqslant i \leqslant s$,$s \geqslant 2$)时,$\varphi(n^k) = p_1^{\alpha_1k-1}p_2^{\alpha_2k-1}\cdots p_s^{\alpha_sk-1}(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_s-1)$,如果 $Z(n^k) = \varphi(n^k)$,根据 $Z(n)$ 的定义可得 $n^k \mid \dfrac{\varphi(n^k)[\varphi(n^k)+1]}{2}$,

即

$$p_1^{\alpha_1k}p_2^{\alpha_2k}\cdots p_s^{\alpha_sk} \mid p_1^{\alpha_1k-1}p_2^{\alpha_2k-1}\cdots p_s^{\alpha_sk-1}(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_s-1)$$

亦即

$$p_1p_2\cdots p_s \mid (p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_s-1).$$

显然不成立,所以 $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 不是方程(2)的解。

(Ⅱ)为偶数时,我们分以下几种情况讨论:

(i)当 $n = 2^{\alpha}$(其中 $\alpha > 0$)时,$Z(2^{\alpha k}) = 2^{\alpha k+1} - 1$,$\varphi(2^{\alpha k}) = 2^{\alpha k-1}$,则 $2^{\alpha k+1} - 1 \neq 2^{\alpha k-1}$,即 $Z(2^{\alpha k}) \neq \varphi(2^{\alpha k})$,即 $Z(n^k) \neq \varphi(n^k)$,所以 $n = 2^{\alpha}$ 不是方程(2)的解。

(ii)当 $n = 2^{\alpha}p^{l}$(其中 $\alpha > 0$,p 为素数,$l \geqslant 1$)时,$\varphi(2^{\alpha k}p^{lk}) = \varphi(2^{\alpha k})\varphi(p^{lk}) = 2^{\alpha k-1}p^{lk-1}(p-1)$,如果 $Z(n^k) = \varphi(n^k)$,根据

$Z(n)$ 的定义可得 $n^k \mid \frac{\varphi(n^k)[\varphi(n^k)+1]}{2}$，

即

$$2^{\alpha k}p^{lk} \mid \frac{2^{\alpha k-1}p^{lk-1}(p-1)[2^{\alpha k-1}p^{lk-1}(p-1)+1]}{2}.$$

即

$$2p \mid \frac{(p-1)[2^{\alpha k-1}p^{lk-1}(p-1)+1]}{2}.$$

又 $(2,p)=1$，$2 \nmid \frac{(p-1)[2^{\alpha k-1}p^{lk-1}(p-1)+1]}{2}$，$p \nmid \frac{(p-1)[2^{\alpha k-1}p^{lk-1}(p-1)+1]}{2}$，

即

$$2p \nmid \frac{(p-1)[2^{\alpha k-1}p^{lk-1}(p-1)+1]}{2}.$$

所以 $2p \mid \frac{(p-1)[2^{\alpha k-1}p^{lk-1}(p-1)+1]}{2}$ 不成立，所以 $n=2^{\alpha}p^{l}$ 不是方程(2)的解。

(iii) 当 $n=2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$(其中 $p_1,p_2,\cdots p_s$ 均大于2，$\alpha,\alpha_i \geqslant 1$，$s \geqslant 2$)时．令 $n=2^{\alpha}m$，$2 \nmid m$，由于 $(2^{\alpha},m)=1$，则 $\varphi(n^k)=2^{\alpha k-1}\varphi(m^k)$，如果 $Z(n^k)=\varphi(n^k)$，根据 $Z(n)$ 的定义可得 $n^k \mid \frac{\varphi(n^k)[\varphi(n^k)+1]}{2}$，

即

$$2^{\alpha k}m^k \mid \frac{2^{\alpha k-1}\varphi(m^k)[2^{\alpha k-1}\varphi(m^k)+1]}{2}$$

即

$$2^{\alpha k}m^k \mid 2^{\alpha k-2}\varphi(m^k)[2^{\alpha k-1}\varphi(m^k)+1]$$

又 $(2^{\alpha k},m^k)=1$，$2^{\alpha k} \nmid 2^{\alpha k-2}\varphi(m^k)[2^{\alpha k-1}\varphi(m^k)+1]$，$m^k \nmid 2^{\alpha k-2}\varphi(m^k)[2^{\alpha k-1}\varphi(m^k)+1]$，

所以 $2^{\alpha k}m^k \nmid 2^{\alpha k-2}\varphi(m^k)[2^{\alpha k-1}\varphi(m^k)+1]$，得出矛盾，所以 $n=2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 不是方程(2)的解。

综上所述，方程(2)仅有正整数解 $n=1$。

参考文献:

[1] SMARANDACHE F. Only problems, not solutions [M]. Chicago: Xiquan Publication House, 1993.

[2] MAJUMDAR A A K. A note on the Pseudo-Smarandache function. Scientia Magna journal, 2006, 2(3): 1-25.

[3] MAJUMDAR A A K. On some Pseudo-Smarandache function related triangles [J]. Scientia Magna journal, 2008, 4(3): 95-105.

[4] 张爱玲. 关于伪Smarandache函数的一个方程及其正整数解 [J]. 西北大学学报(自然科学版), 2008, 38(4): 535-540.

[5] KASHHAEA K. Comments and topics on Smarandache notions and problems [M]. New Mexico: Erhus University Press, 1996.

[6] 张文鹏. 关于F. Smarandache函数的两个问题 [J]. 西北大学学报(自然科学版), 2008, 38(2): 173-176.

[7] 范盼红. 对Catalan数的性质以及关于Smarandache函数的几个方程的研究 [D/OL]. 西安: 西北大学, 2012. [2016-10-14] http: //www. cnki. netl.

[8] 鲁伟阳. 一类包含伪Smarandache函数与Euler函数的方程 [J]. 河南科学, 2013, 31(10): 1597-1599.

[9] 高丽, 鲁伟阳, 郝虹斐. 包含伪Smarandache函数与Euler函数的两个方程 [J]. 陕西科技大学学报, 2013, 31(6): 163-165.

[10] 范盼红. 关于F. Smarandache函数与欧拉函数的三个方程 [J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2012, 29(5): 626-628.

[11] LIU Y N. On the Smarandache pseudo number sequence [J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics. 2006, 10(4): 42-59.

[12] LOU Y B. On the pseudo Smarandache function [J]. Scientia Magna, 2007, 3(4): 48-50.

[13] ZHENG Y N. On the the pseudo Smarandache function and its two conjectures [J]. Scientia Magna, 2007, 3(4): 50-53.

[14] 马金萍, 刘宝利. 一个包含Smarandache函数的方程 [J]. 数学学报(中文版), 2007, 50(5): 1185-1190.

[15] 乐茂华. 关于Smarandache函数的一个猜想 [J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2007, 24(5): 687-688.

[16] SANDOR J. On a dual of the Pseudo Smarandache Function [J]. Smarandache Notions JOURNAL, 2002, 13: 18-23.

[17] 高丽, 赵祈芬. 一类包含伪Smarandache函数与欧拉函数的方程 [J]. 河南科学, 2017, 35(2): 180-183.

[18] 潘承洞, 潘承彪. 初等数论 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2003.

[19] 张文鹏. 初等数论 [M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2007.