第22卷 第2期 2008年3月
长沙大学学报 JOURNAL OF CHANGSHA UNIVERSITY
Vol.22 No.2 Mar. 2008

含 Smarandache 函数的方程及解的探讨*

吴 强
(茂名职业技术学院, 广东 茂名 525000)

摘 要: 运用 Diophantine 方程的相关知识, 确定方程: $a^2(k+2, s(n))=a^2(k+1, s(n))+a^2(k, s(n))$: (1) 对任意正整数 r 和 b, 设 $a(r, b)$ 是 b 的前 r 位数字所组成的数, $n, k\in N$ 的所有解. (2) 对任意正整数 r 和 b, 设 $a(r, b)$ 是 b 的后 r 位数字所组成的数的所有正整数解 (n, k).

关键词: Smarandache 函数; Diophantine 方程; 正整数解
中图分类号: O189 文献标识码: A 文章编号: 1008—4681(2008)02—0001—02

对任意正整数

$$b=\overline{t_s\cdots t_2t_1} \tag{1}$$

有 s 个数字. 设

$$a(r, b)=\overline{t_s\cdots t_{s-r+1}} \tag{2}$$

是 b 的前 r 个数字所组成的数. 最近, Bercze 在文献[1] 提出如下问题.

对任意正整数 a, 设 $S(a)$ 是 a 的 Smarandache 函数.

问题1: 如何确定方程

$$a^2(k+2, s(n))=a^2(k+1, s(n))+a^2(k, s(n)) \quad n, k\in N \tag{3}$$

的所有解.

问题2: 设 $\beta(r, b)=\overline{t_r\cdots t_1}$ 是 b 的后 r 个数字所组成的数. 如何确定适合 $\beta^2(k+2, s(n))=\beta^2(k+1, s(n))+\beta^2(k, s(n))$ 的所有正整数解 (n, k).

上述两个问题尚未得到解决. 本文运用 Diophantine 方程的基础理论和相关知识, 完整地解决了上述两个问题. 本文的主要结果是:

定理1: 方程 $a^2(k+2, s(n))=a^2(k+1, s(n))+a^2(k, s(n))$ 没有整数解 (n, k).

证明: 设 (n, k) 是(3)的一个解, 我们已经知道, $S(n)$ 实际上是一个正整数(参看[2]), 设 $b=S(n)$, 我们可以假设 b 是一个如(1)所表示的有 s 位数字所组成的数, 对任意正整数 r, 由 $a(r, b)$ 的定义(2), 我们有

$$a(r+1, b)=\begin{cases}10\circ a(r, b)+t_{s-r+1} & 若\ r<s\\ a(r, b) & 若\ r\geq s\end{cases} \tag{4}$$

若 $k>s-1$, 则由(4)我们有 $a(k+2, b)=a(k+1, b)$

因此, 由(3)我们得到 $a(k, b)=0$, 这是一个矛盾.

若 $k<s-1$, 则由(4), 我们有

$$a(k+2, b)\geq 10\circ a(k+1, b) \tag{5}$$

因此, 由(3)和(5), 我们有

$$99\circ a^2(k+1, b)\leq a^2(k, b) \tag{6}$$

可是, 由(4)我们可以看出 $a(k+1, b)\geq a(k, b)$, 因此(6)是不可能的, 这样, 方程(3)没有解 (n, k).

现在我们讨论另一个问题. 设

$$\beta(r, b)=\overline{t_r\cdots t_1} \tag{7}$$

是 b 的后 r 个数字所组成的数. 最近, 文献[1] 作者也提出如下问题.

问题: 确定适合

$$\beta^2(k+2, s(n))=\beta^2(k+1, s(n))+\beta^2(k, s(n)) \tag{8}$$

的所有正整数解 (n, k).

本文也完整地解决了上述问题.

由 Smarandache 函数的定义(参看文献[1]), 我们有 $S(m!)=m$, 对任何正整数 m 成立. 因此, 由定理2, 我们立即得到下面推论.

推论: 对任何固定正整数 k, 存在无穷多个正整数

$$n=(10^{k+2}c+10^kd)!\ c\geq 0,\quad d=1, 2, \cdots 9. \tag{9}$$

满足(8).

定理2: 适合方程 $\beta^2(k+2, s(n))=\beta^2(k+1, s(n))+\beta^2(k, s(n))$ 的正整数解 (n, k) 当且仅当 n

* 收稿日期: 2007—11—10
作者简介: 吴强(1960—), 男, 广东化州人, 茂名职业技术学院教授. 研究方向: 数论研究、特殊数列和特殊矩阵.

满足 $S(n)=10^{k+2}c+10^{k}d$, 这里, c 是一个非负整数, d 是一个正整数, 且 $1\le d\le 9$.

证明: 设(n,k)是适合(8)的正整数对, 且设 $b=S(n)$, 则 b 是一个正整数, 我们假定 b 是一个形如(1)的 s 位数, 对任意正整数 r, 由 $\beta(r,b)$ 的定义(7), 我们有

$$0\le\beta(r,b)<10^{r} \tag{10}$$

且 $$\beta(r+1,b)=\beta(r,b)+10^{r}t_{r+1} \tag{11}$$

如果 $t_{k+2}\neq 0$, 则由(10)和(11), 我们有

$$\beta(k+2,b)\ge\beta(k+1,b)+10^{k+1}$$
$$>\beta(k+1,b)+\beta(k,b) \tag{12}$$

由此可得到

$$\beta^{2}(k+2,b)\ge\beta^{2}(k+1,b)+\beta^{2}(k,b) \tag{13}$$

这与(8)矛盾.

若 $t_{k+2}=0$, 则由(11), 我们有

$$\beta(k+2,b)=\beta(k+1,b) \tag{14}$$

把(14)代入(8), 我们得到 $\beta(k,b)=0$, 由(7)我们有:

$t_1=t_2=\cdots=t_k=0$, 这样, $b=S(n)$ 适合 $S(n)=10^{k+2}c+10^{k}d$.

定理证明完毕.

对任意正整数 a, 设 $S(a)$ 为 a 的 Smarandache 函数, 对任意正整数 r 和 b, 设 $a(r,b)$ 是 b 的前 r 位数字所组成的数, 2001年, Bercze 在文献[1]中提出了一个问题: 如何确定方程 $a^{2}(k+2,s(n))=a^{2}(k+1,s(n))+a^{2}(k,s(n))\quad n,k\in N$ 的所有解. 更进一步, 文献[1]的作者又提出另一个问题: 设 $\beta(r,b)$ 是 b 的后 r 位数字所组成的数, 如何确定 $\beta^{2}(k+2,s(n))=\beta^{2}(k+1,s(n))+\beta^{2}(k,s(n))$ 的所有正整数解 (n,k). 本文运用 Diophantine 方程的相关知识, 完整地解决了 Bercze 所提出的两个问题, 即证明了方程(1)没有正整数解 (n,k), 同时确定了方程(2)的所有正整数解 (n,k). 本文是文献[2]的重要推广, 对研究 Smarandache 函数理论有重要意义.

参考文献:

[1] F. Smarandache. A function in number theory[M]. Timisoara X VIII: Am. Univ, 1980.

[2] M. Bercze. Open questions for the Smarandache function[J]. Smarandache Notions J. 2001, (12): 201—203.

(责任编校: 向阳)