第32卷 第2期 延安大学学报(自然科学版) Vol. 32 No. 2
2013年6月 Journal of Yanan University(Natural Science Edition) Jun. 2013
DOI: 10.3969/J.ISSN.1004-602X.2013.02.004

有关 Smarandache 复合函数的一个均方差问题

李 波,郭金保,董海浪

(延安大学 数学与计算机科学学院,陕西 延安 716000)

摘 要: 利用初等解析的方法研究了复合函数 $S(b_k(n))$ 与数论函数 $U(n)$ 的均方差均值分布,并给出了一个较强的渐近公式。

关键词: Smarandache 函数; k 次补数; 均方差; 均值; 渐近公式

中图分类号: O156.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 1004-602X(2013)02-0004-03

1 引言及结论

美籍罗马尼亚著名的数论专家 Smarandache 教授在文献[1]中提出 Smarandache 函数 $S(n)$,函数 $S(n)$ 定义为有最小的正整数 m,使得 $n\mid m!$,即 $S(n)=\min\{m: m\in N, n\mid m!\}$,例如它的前几项 $S(1)=1$,$S(2)=2$,$S(3)=3$,$S(4)=4$,$S(5)=5$,$S(6)=3$,$S(7)=7$,$S(8)=4$,$S(9)=6$,$S(10)=5$,…。由 $S(n)$ 的定义我们容易推出:若 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 是 n 的标准分解式,那么 $S(n)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant r}\{S(p_i^{\alpha_i})\}$。关于 Smarandache 函数 $S(n)$ 的相关性质,许多学者进行了研究,同时获得了一些有价值的结果。例如:文[2]证明了如果 n 是一个素数,那么有 $SL(n)=S(n)$,这里 $SL(n)$ 是 Smarandache LCM 函数。

王永兴教授在文[3]中研究了 $S(n)$ 的均值性质,给出了它的渐近公式:

$$\sum_{n\leqslant x}S(n)=\frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right)。$$

此外,徐哲峰在文[4]中研究了 Smarandache 函数 $S(n)$ 与 n 的最大素因数 $P(n)$ 的均方差的均值问题,得到了渐近公式:

$$\sum_{n\leqslant x}(S(n)-P(n))^2=\frac{2\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right)。$$

其中 $\zeta(s)$ 表示 Riemann Zeta-函数。

若 $\forall k\in N, k\geqslant 2$,$\forall n\in N, n\geqslant 2$,如果 $b_k(n)$ 是满足 $b_k(n)\times n$ 为完全 k 次方的最小正整数,则称 $b_k(n)$ 为 n 的 k 次补数函数。而对于数论函数 $U(n)$ 定义为:$U(1)=1$;$n>1$ 时,若 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 是 n 的标准分解式,则 $U(n)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant r}\{\alpha_1p_1,\alpha_2p_2,\cdots\alpha_rp_r\}$。本文的主要目的是研究复合函数 $S(b_k(n))$ 与数论函数 $U(n)$ 的均方差均值分布,同时得到了一个较强的渐近公式。

定理 设 $k\geqslant 2$ 是一个给定的整数,那么对于任意实数 $x\geqslant 3$,有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(S(b_k(n))-(k-1)U(n))^2=\frac{2}{3}\zeta\left(\frac{3}{2}\right)k^2\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x}+O\left[\frac{x^{\frac{11}{6}}}{\ln^2 x}\right]$$

其中 $\zeta(s)$ 是 Riemann zeta-函数。

2 引理

引理 设 $k\geqslant 2$ 为给定的整数,那么对于任意实数 $x\geqslant 3$,有估计式

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P(n)\leqslant n^{\frac{1}{3}}}}(S(b_k(n))-(k-1)U(n)) \ll k^2\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\ln x}$$

证明: 若 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 是 n 的标准分解式,

收稿日期:2013-04-20
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10901128)
作者简介:李 波(1986—)男,陕西榆林人,延安大学在读硕士研究生。

设 $b_k(n)=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_r^{\beta_r}$，那么 $S(b_k(n))=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant r}\{S(P_i^{\beta_i})\}$，在这里我们令 $\beta p=\max\{\beta_1p_1,\beta_2p_2\cdots\beta_rp_r\}$。

注意到 $S(b_k(n))\leqslant\beta p\leqslant kp$，当最大素因数 $P(n)$ 在 n 的标准分解式中的方幂为 1 时，$S(b_k(n))=(k-1)P(n)$，这时有

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P(n)\leqslant n^{\frac{1}{3}}}}(S(b_k(n))-(k-1)U(n))\ll\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P(n)\leqslant n^{\frac{1}{3}},p^2(n)\mid n}}k^2P^2(n)\ll\sum_{\substack{np^2\leqslant x\\ p\leqslant x^{\frac{1}{3}}}}k^2p^2=$$

$$\sum_{p\leqslant x^{\frac{1}{3}}}p^2\sum_{n\leqslant\frac{x}{p^2}}k^2\ll k^2\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\ln x}。$$

于是完成了引理的证明。

3 定理的证明

为了完成定理的证明，我们将区间所有在 [1，x] 的正整数 n 分为以下的五个子集合：

A：$P(n)>\sqrt{n}$，且 $n=mP(n)$，$m<P(n)$；B：$n^{\frac{1}{3}}<P(n)\leqslant\sqrt{n}$，且 $n=mP^2(n)$，$m<n^{\frac{1}{3}}$；C：$n^{\frac{1}{3}}<p_1<P(n)\leqslant\sqrt{n}$ 且 $n=mp_1P(n)$，p_1 是素数；D：$n^{\frac{1}{3}}<P(n)\leqslant\sqrt{n}$，且有 $n=mP(n)$，$m=q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}\cdots q_s^{\beta_s}$ 是 m 的标准分解式，且 $q_i\leqslant n^{\frac{1}{3}}$；

E：$P(n)\leqslant n^{\frac{1}{3}}$

显然若 $n\in A$，有 $S(b_k(n))=(k-1)P(n)$，而此时的 $U(n)=P(n)$，那么我们可以推出 $\sum\limits_{n\in A}(S(b_k(n))-(k-1)U(n))^2=0$，类似的，若 $n\in C$，有 $S(b_k(n))=(k-1)P(n)$，且此时 $U(n)=P(n)$，那么有

$$\sum_{n\in C}(S(b_k(n))-(k-1)U(n))^2=0$$

现在我们来讨论在集合 B 中的情况：

当 $k>2$ 时，有 $S(b_k(n))=(k-2)P(n)$，于是有

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n^{\frac{1}{3}}<P(n)\leqslant\sqrt{n}}}(S(b_k(n))-(k-1)U(n))^2$$

$$=\sum_{\substack{mp^2\leqslant x\\ (mp^2)^{\frac{1}{3}}<p\leqslant\sqrt{mp^2}}}(S(p^{k-2})-2(k-1)P(n))^2$$

$$=k^2\sum_{mp^2\leqslant x}p^2=k^2\sum_{m<x^{\frac{1}{3}}}\sum_{m^2<p^2\leqslant\frac{x}{m}}p^2,\tag{1}$$

当 $k=2$ 时，有 $S(b_k(n))\leqslant k^2P(m)\leqslant k^2n^{\frac{1}{3}}$，这时仍然有

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n^{\frac{1}{3}}<P(n)\leqslant\sqrt{n}}}(S(b_2(n))-U(n))^2$$

$$=\sum_{\substack{mp^2\leqslant x\\ (mp^2)^{\frac{1}{3}}<p\leqslant\sqrt{mp^2}}}(S^2(b_2(n))-4pS(b_2(n))+4p^2)$$

$$=4\sum_{mp^2\leqslant x}p^2+O\left(\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n^{\frac{1}{3}}<P(n)\leqslant\sqrt{n}}}\left((mp^2)^{\frac{2}{3}}+(mp^2)^{\frac{1}{3}}p\right)\right)$$

$$=4\sum_{m<x^{\frac{1}{3}}}\sum_{m^2<p^2\leqslant\frac{x}{m}}p^2+O\left(x^{\frac{4}{3}}\right),\tag{2}$$

在这里我们利用 Abel 求和公式以及素数定理

$\pi(x)=\sum\limits_{p\leqslant x}1=\dfrac{x}{\ln x}+O\left(\dfrac{x}{\ln^2x}\right)$[5]，可得

$$\sum_{m<p\leqslant\sqrt{\frac{x}{m}}}p^2=\frac{x}{m}\pi(\sqrt{\frac{x}{p}})-m^2\pi(m)-\int_m^{\sqrt{\frac{x}{m}}}2y\pi(y)\,dy$$

$$=\frac{2}{3}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}(\ln x-\ln m)}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}\ln^2\sqrt{\frac{x}{m}}}\right),\tag{3}$$

结合(1)，(2)，(3)式，同时由于 $x^{\frac{4}{3}}\ll\dfrac{x^{\frac{3}{2}}p}{\ln^2x}$，当 $k\geqslant2$ 时，有

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n^{\frac{1}{3}}<P(n)\leqslant\sqrt{n}}}(S(b_k(n))-(k-1)U(n))^2$$

$$=k^2\sum_{m<x^{\frac{1}{3}}}\sum_{m^2<p^2\leqslant\frac{x}{m}}p^2+O\left(x^{\frac{4}{3}}\right)$$

$$=k^2\sum_{m\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{2}{3}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}(\ln x-\ln m)}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}\ln^2\sqrt{\frac{x}{m}}}\right)\right)+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2x}\right)$$

$$=\frac{2}{3}k^2\zeta(\frac{3}{2})\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2x}\right),\tag{4}$$

最后，我们讨论集合 D 的情况：易知 $S(b_k(n))=(k-1)P(n)$，此时 $U(n)$ 有两种情形，且根据情况只取其中一种，即 $U(n)=q_i\beta_i$ 或者 $U(n)=P(n)$，无论哪一种情形都有

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in D}}(S(b_k(n))-(k-1)U(n))^2=$$

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in D}}((k-1)P(n)-(k-1)U(n))^2$$

$$\ll\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in D}}((k-1)P(n))^2\ll\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in D}}(kP(n))^2$$

$$= k^2 \sum_{\substack{mp \leqslant x \\ p_1 \mid m, p_1 < \sqrt[3]{x} \\ \sqrt[3]{x} < p < \sqrt{x}}} p^2 \ll k^2 \sum_{\substack{x^{\frac{1}{2}} < m < x^{\frac{2}{3}} \\ p_1 \mid m, p_1 < \sqrt[3]{x} \\ \sqrt[3]{x} < p < \sqrt{x}}} \sum_{x^{\frac{1}{3}} < p < x^{\frac{1}{2}}} p^2$$

$$\ll k^2 \sum_{p_1 \leqslant x^{\frac{1}{3}}} \sum_{x^{\frac{1}{3}} \leqslant p \leqslant x^{\frac{1}{2}}} p^2 \ll k^2 \cdot \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\ln x} \cdot \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\ln x} \ll \frac{k^2 x^{\frac{11}{6}}}{\ln^2 x} \qquad (5)$$

综合以上讨论,并结合(4),(5)式以及引理,我们有

$$\sum_{n \leqslant x} (S(b_k(n)) - (k-1)U(n))^2 = \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in A}} (S(b_k(n)) - (k-1)U(n))^2 + \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in B}} (S(b_k(n)) - (k-1)U(n))^2 + \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in C}} (S(b_k(n)) - (k-1)U(n))^2 + \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in D}} (S(b_k(n)) - (k-1)U(n))^2 + \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in E}} (S(b_k(n)) - (k-1)U(n))^2$$

$$= \frac{2}{3}\zeta\left(\frac{3}{2}\right) k^2 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right) + O\left(\frac{k^2 x^{\frac{4}{3}}}{\ln x}\right) + O\left(\frac{k^2 x^{\frac{11}{6}}}{\ln^2 x}\right) = \frac{2}{3}\zeta\left(\frac{3}{2}\right) k^2 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x} + O\left(\frac{x^{\frac{11}{6}}}{\ln^2 x}\right)$$

于是定理得证。

参考文献:

[1] Smarandache F. Only problems, not solutions [M]. Chicago: Xiquan Publ. House, 1993.

[2] Murthy A. Some notions on least common multiples [J]. Smarandache Notions Journal, 2001, (12): 307 – 309.

[3] Wang Y X. On the Smarandache fuction, reseach fon smarandache problem in number theory [M]. Thoenix Hexis, 2005, 2: 103 – 106.

[4] Xu Z F. On the value distribution of the Smarandache fuction [J]. Acta Mathematica Sinica (in Chinese), 2006, 49 (5): 1009 – 1012.

[5] 潘承洞,潘承彪. 素数定理的证明 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1988.

[责任编辑 贺小林]

On the Average Variance of the Smarandache Composite Function

LI BO, GUO Jin-bao, DONG Hai-lang

(College of Mathematics and Computer Science, Yan an University, Yan an 716000, China)

Abstract: The main purpose of this paper is using the elementary and analytic methods to study the average variance mean value problem involving the F. Smarandache composite function $S(b_k(n))$ and a number theory function $U(n)$, and give a sharper asymptotic formula for it.

Key words: Smarandache function; k – power complements; the average variance; the mean value; asymptotic formula