DOI:10.13537/j.issn.1004-3918.2013.01.031

第 31 卷 第 1 期　　河 南 科 学　　Vol.31 No.1
2013 年 1 月　　HENAN SCIENCE　　Jan. 2013

文章编号：1004-3918(2013)01-0021-04

求解两个与 Smarandache 函数有关的方程

关文吉

(渭南师范学院 数学与信息科学学院，陕西 渭南 714000)

摘 要： 对任意正整数 n，著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 m，使得 $n|m!$. 对于任意给定的正整数 n，伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 定义为最小的正整数 m，使得 $n|1+2+\cdots m=\frac{m(m+1)}{2}$. 对任意正整数 n，伪 Smarandache 无平方因子函数 $Zw(n)$ 定义为最小的正整数 m，满足 $n|m^n$，即 $Zw(n)=\min\{m:m\in \mathrm{N},n|m^n\}$. 用初等方法研究了方程 $S(n)+Z(n)=n$ 和 $Zw(Z(n))-Z(Zw(n))=0$ 并给出了它们的全部解.

关键词： Smarandache 函数；伪 Smarandache 函数；整数解

中图分类号： O 156　　**文献标识码：** A

Two Equations Involving the Smarandache Function

Guan Wenji

(Department of Mathematics and Information Science, Weinan Normal University, Weinan 714000, Shaanxi China)

Abstract: For any positive integer n, the famous Smarandache function $S(n)$ is defined as the smallest positive integer m such that $n|m!$. The Pseudo-Smarandache function $Z(n)$ is defined to be the smallest positive integer m such that $n|1+2+\cdots+m=\frac{m(m+1)}{2}$. The Pseudo-Smarandache function $Zw(n)$ is defined to be the smallest positive integer m such that $n|m^n$. The main purpose of this paper is to use the elementary method to study the equation $S(n)+Z(n)=n$ and $Zw(Z(n))-Z(Zw(n))=0$, and all solutions for them are given.

Key words: Smarandache function; pseudo-Smarandache function; integer solution

1 引言及结论

对任意正整数 n，令 $S(n)$ 表示 Smarandache 函数，其定义为使 $n|m$ 的最小的正整数 m，即 $S(n)=\min\{m: n|m!, m\in \mathrm{N}\}$. 如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 为 n 的标准因子分解式，则由定义容易推出 $S(n)=\max\limits_{1\le i\le k}\{s(p_i^{\alpha_i})\}$. 由此也不难算出 $S(n)$ 的前几个值为：$S(1)=1$，$S(2)=2$，$S(3)=3$，$S(4)=4$，$S(5)=5$，$S(6)=3$，$S(7)=7$，$S(8)=4$，$S(9)=6$，$S(10)=5$，$S(11)=11$，$S(12)=4$，$S(13)=13$，$S(14)=7$，$S(15)=5$，$S(16)=6$，$\cdots$. 对于任意给定的正整数 n，著名的伪 Smaran-ache 函数 $Z(n)$ 定义为最小的正整数 m，使得 $n|1+2+\cdots+m=\frac{m(m+1)}{2}$，即

$$Z(n)=\min\left\{m:m\in \mathrm{N},n\,\Big|\,\frac{m(m+1)}{2}\right\}.$$

由此公式可知 $Z(1)=1$，$Z(2)=3$，$Z(3)=2$，$Z(4)=7$，$Z(5)=4$，$Z(6)=3$，$Z(7)=6$，$Z(8)=15$，$Z(9)=8$，$Z(10)=4$，$Z(11)=10$，$Z(12)=8$，$Z(13)=12$，$Z(14)=7$，$Z(15)=5$，$Z(16)=31$，$\cdots$. 该函数是 Kashihara 在文献 [1] 中提出的. Kashihara 和 Ibstedt 研究了它的性质并获得了一系列有趣的结果. 对任意正整数 n，著名的伪 Smarandache 无平方因子函数 $Zw(n)$ 定义为最小的正整数 m，满足 $n|m^n$，即 $Zw(n)=\min\{m:m\in \mathrm{N},n|m^n\}$. 关于函数 $Zw(n)$

收稿日期：2012-10-11
基金项目：渭南师范学院重点科研计划项目(11YKF016)
作者简介：关文吉(1978-)，女，陕西大荔人，讲师，硕士，研究方向为基础数学.

的研究是数论中非常重要和有意义的课题，许多学者研究了它的性质，并得出了有意义的结论.

乐茂华教授在文献[2]中证明了 $Zw(n)=\prod_{p\mid n}p$，其中 p 为 n 的素因子. 从这个公式，我们很容易得到 $Zw(n)$ 的值. 如 $Zw(1)=1$，$Zw(2)=2$，$Zw(3)=3$，$Zw(4)=2$，$Zw(5)=5$，$Zw(6)=6$，$Zw(7)=7$，$Zw(8)=2$，$Zw(9)=3$，$Zw(10)=10$，$\cdots$. 很容易看出，如果 n 为一个无平方因子数，则 $Zw(n)=n$ 如果 n 为素数 p，则 $Zw(p)=p$. 同时他也证明了级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(Zw(n))^{a}}$，$a\in \mathbf{R}$，$a>0$，是发散的.

本文的主要目的是利用初等方法研究方程 $S(n)+Z(n)=n$ 和 $Zw(Z(n))-Z(Zw(n))=0$，并给出了它们的全部正整数解，也就是要证明下面的：

定理 1　$n=6$，12 是方程 $S(n)+Z(n)=n$ 仅有的两个特殊正整数解，其它正整数 n 满足方程当且仅当 $n=p\cdot u$ 或者 $n=p\cdot 2^{\alpha}\cdot u$，其中素数 $p\geqslant 7$，$2^{\alpha}\mid p-1$. u 是 $\frac{p-1}{2^{\alpha}}$ 的任意一个大于 1 的奇数因子.

定理 2　方程 $Zw(Z(n))-Z(Zw(n))=0$ 有无穷多个正整数解.

2　定理的证明

1）为了证明定理1，需要引入以下两个引理：

引理 1[1]　n 是偶完全数的充要条件是 $n=2^{p-1}(2^{p}-1)$，其中 p 和 $2^{p}-1$ 都是素数.

引理 2[2]　如果 p 为一素数，那么 $S(p^{k})\leqslant kp$ 如果 $k<p$，那么 $S(p^{k})=kp$，其中 k 为任意给定的正整数.

下面利用初等方法来证明定理 1.

容易验证 $Z(1)+S(1)=2\neq 1$，$Z(2)+S(2)=5\neq 2$，$Z(3)+S(3)=5\neq 3$，$Z(4)+S(4)=11\neq 4$，$Z(5)+S(5)=9\neq 5$，$Z(6)+S(6)=6$ 所以 $n=1,2,3,4,5$ 都不是方程 $S(n)+Z(n)=n$ 的解，$n=6$ 是方程 $S(n)+Z(n)=n$ 的解. 所以方程的其它解一定满足 $n\geqslant 7$，若 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 为 n 的标准因子分解式，则 $S(n)=\max_{1\leqslant i\leqslant k}\{S(p_i^{\alpha_i})\}=S(p^{\alpha})$，注意到 $p\mid n$ 及 $S(n)=u.p$，故可设 $n=p^{\alpha}.n_1$，当 n 是方程 $S(n)+Z(n)=n$ 的解时有

$$Z(n)+u.p=p^{\alpha}.n_1. \tag{3}$$

首先证明(3)中 $\alpha=1$，否则假定 $\alpha\geqslant 2$，由(3)知 $p\mid Z(n)=m$，由 $Z(n)=m$ 的定义知 $n=p^{\alpha}.n_1$ 整除 $\frac{m(m+1)}{2}$，而 $(m,m+1)=1$，故 $p^{\alpha}\mid m$，从而由(3)推出 $p^{\alpha}\mid S(n)=u.p$，即 $p^{\alpha-1}\mid u$，从而 $p^{\alpha-1}\leqslant u$，但另一方面由于 $S(n)=S(p^{\alpha})=u.p$，由 $S(n)$ 的性质知 $u\leqslant\alpha$，所以 $p^{\alpha-1}\leqslant u\leqslant\alpha$，此式对于奇素数 p 显然不成立，如果 $p=2$，则当 $\alpha\geqslant 3$ 时，$p^{\alpha-1}\leqslant u\leqslant\alpha$ 也不成立. 于是只有一种可能：$u=\alpha=2$，注意到 $n\geqslant 5$ 以及 $S(n)=4$，所以此时只有一种可能：$n=12$，而 $n=12$ 是方程 $S(n)+Z(n)=n$ 的一个解，所以如果其它正整数 n 满足方程 $S(n)+Z(n)=n$，则(3)式中必有 $S(n)=p$，$\alpha=u=1$，此时，令 $Z(n)=m=p.v$，则(3)式成为 $v+1=n_1$，即 $n=p.(v+1)$，$Z(n)=p.v$，再由 $Z(n)$ 的定义知 $n=p.(v+1)$ 整除 $\frac{pv.(pv+1)}{2}$，即 $(v+1)$ 整除 $\frac{v.(pv+1)}{2}$，由于 $(v,v+1)=1$，所以当 v 为偶数时由上式推出 $v+1\mid pv+p-p+1$，即 $v+1\mid p-1$ 或者 $v+1\mid\frac{p-1}{2}$. 显然对 $\frac{p-1}{2}$ 的任意大于 1 的奇数因子 r，$n=p.r$ 是方程 $S(n)+Z(n)=n$ 的解. 因为此时有 $Z(p.r)=p.(r-1)$.

当 v 为奇数时，由 $(v+1)$ 整除 $\frac{v.(pv+1)}{2}$ 得到 $v+1\mid\frac{pv+1}{2}=\frac{(p-1)(v+1)+v-p+2}{2}$，由此知 $p-1=(2k+1)(v+1)$，于是可设 $p-1=2^{\beta}h$，其中 h 为奇数，则 $\frac{v+1}{2^{\beta}}$ 为小于 h 的奇数因子. 容易验证对任意奇数 $r\mid h$ 且 $r<h$，$n=p2^{\beta}r$ 为方程 $S(n)+Z(n)=n$ 的解. 因为此时有 $Z(p2^{\beta}r)=p(2^{\beta}r-1)$. 事实上，由于 $r\mid h$，容易推出 $p2^{\beta}r$ 整除

$$\frac{p(2^{\beta}r-1)[p(2^{\beta}r-1)+1]}{2}.$$

其次当 $m<p(2^\beta r-1)$ 时，不可能有 $p2^\beta r$ 整除 $\frac{m(m+1)}{2}$，于是由 $Z(n)$ 的定义知 $Z(p2^\beta r)=p(2^\beta r-1)$.

定理 1 证毕.

2) 为了证明定理 2，需要引入以下五个引理：

引理 3[3] 对于任意的素数 $p>2$，$Z(p)=p-1$.

引理 4[4] 若 $n=p^m$，其中 p 为大于 2 的素数，m 为任意自然数，则 $Z(n)=n-1$.

引理 5[5] 若 $n=2^m$，其中 m 为任意自然数，则 $Z(n)=2n-1$.

引理 6[6] 若 n 为任意自然数，且 $\frac{n}{2}$ 为比 2 大的奇数，则

$$Z(n)=\begin{cases}\frac{n}{2}-1, & \text{若 } 4\mid(\frac{n}{2}-1),\\ \frac{n}{2}, & \text{若 } 4\mid(\frac{n}{2}+1).\end{cases}$$

引理 7[7] 若 n 为任意自然数，且 $\frac{n}{3}$ 为比 3 大的素数，则

$$Z(n)=\begin{cases}\frac{n}{3}-1, & \text{若 } 3\mid(\frac{n}{3}-1),\\ \frac{n}{3}, & \text{若 } 3\mid(\frac{n}{3}+1).\end{cases}$$

这些引理的证明，参阅文献 [3].

显然当 $n=1$ 时，$Zw(Z(1))-Z(Zw(1))=0$，以下来讨论 $n>1$ 时的情形：

①当 $n=p>2$ 时，由引理 3 知

$$Zw(Z(n))=Zw(Z(p))=Zw(p-1);\quad Z(Zw(n))=Z(Zw(p))=Z(p)=p-1.$$

若方程成立，则 $Zw(p-1)=p-1$，显然当 $p-1$ 为无平方因子数时，上式成立. 所以 $n=p>2$ 且 $p-1$ 为无平方因子数为方程的解.

②当 $n=p^m$，$p>2$，$m\in\mathbf{N}$ 且 $m>1$ 时，由引理 4 知

$$Zw(Z(n))=Zw(Z(p^m))=Zw(p^m-1),\quad Z(Zw(n))=Z(Zw(p^m))=Z(p)=p-1.$$

若方程成立，则 $Zw(p^m-1)=p-1$.

解得 $p=3$，$m=2$ 即 $n=9$ 为方程的解.

③当 $n=2^m$，$m\in\mathbf{N}$ 时，由引理 5 知

$$Zw(Z(n))=Zw(Z(2^m))=Zw(2^{m+1}-1),\quad Z(Zw(n))=Z(Zw(2^m))=Z(2)=3.$$

若方程成立，则 $Zw(2^{m+1}-1)=3$.

解得 $m=1$，$n=2$ 为方程的解.

④当 $n=2p_1p_2\cdots p_k$，$p_i>2\ (i=1,2,\cdots,k)$ 为不同的素数时，由引理 6 知

$$Z(n)=\begin{cases}p_1p_2\cdots p_k-1, & \text{若 } 4\mid p_1p_2\cdots p_k-1,\\ p_1p_2\cdots p_k, & \text{若 } 4\mid p_1p_2\cdots p_k+1.\end{cases}$$

故

$$Zw(Z(n))=\begin{cases}Zw(p_1p_2\cdots p_k-1), & \text{若 } 4\mid p_1p_2\cdots p_k-1,\\ p_1p_2\cdots p_k, & \text{若 } 4\mid p_1p_2\cdots p_k+1.\end{cases}$$

$$Z(Zw(n))=Z(2p_1p_2\cdots p_k)=\begin{cases}p_1p_2\cdots p_k-1, & \text{若 } 4\mid p_1p_2\cdots p_k-1,\\ p_1p_2\cdots p_k, & \text{若 } 4\mid p_1p_2\cdots p_k+1.\end{cases}$$

所以当 $n=2p_1p_2\cdots p_k$ 且 $4\mid p_1p_2\cdots p_k+1$ 时，方程成立.

⑤当 $n=3p$，$p\geqslant 5$ 时，由引理 7 知

$$Z(n)=Z(3p)=\begin{cases} p-1, & 若\ 3\mid p-1, \\ p, & 若\ 3\mid p+1. \end{cases}$$

$$Zw(n)=Zw(3p)=3p,$$

故

$$Zw(Z(n))=\begin{cases} Zw(p-1), & 若\ 3\mid p-1, \\ Zw(p)=p, & 若\ 3\mid p+1. \end{cases}$$

$$Z(Zw(n))=Z(3p)=\begin{cases} p-1, & 若\ 3\mid p-1, \\ p, & 若\ 3\mid p+1. \end{cases}$$

所以当 $n=3p$，$p\geqslant 5$ 且 $3\mid p+1$ 时，方程成立．显然存在无穷多个素数 p 使得 $3\mid p+1$，因而方程有无穷多个正整数解．

综合以上①~⑤，得到方程有无穷多个正整数解．

这就完成了定理2的证明．

参考文献：

[1] Kashihara，Kenichiro. Comments and topics on Smarandache notions and problems [M]. USA：Erhus University Press，1996.

[2] Le Maohua. On the Pseudo-Smarandache-Squarefree function [J]. Smarandache Notio-ns Journal，2002，13 (1)：229-236.

[3] David G. orski. The Pseudo-Smarandache function [J]. Smarandache Notions Journal，2002，13 (1)：140-149.

[4] Mark Farris，Patrick Mitshell. Bounding the Smarandache function [J]. Smarandache Notions Journal，2002，13 (1)：37-42.

[5] Mark F，Patrick M. Bounding the Smarandache function [J]. Smarandache Journal，2002 (13)：23-24.

[6] Smarandache F. Only problems，not solutions [M]. Chicago：Xiquan Publishing House，1993.

[7] Tom M. Apostol，Introduction to analytic number theory [M]. New York：Springer-Verlag，1976.

（编辑　张继学）