[基础数学与应用数学研究]

论两类 Smarandache 行列式的推广

杨长恩

(咸阳师范学院　数学与信息科学学院,陕西　咸阳　712000)

摘　要:通过类似于 Smarandache 循环行列式、循环算术级数行列式、双对称行列式,定义了 Smarandache 循环几何级数行列式、双对称几何级数行列式及其一般化,并利用行列式的基本性质,解决了 Smarandache 循环几何级数行列式及其一般化和 Smarandache 双对称几何级数行列式的计算问题。

关键词:Smarandache 循环行列式;Smarandache 双对称行列式;Smarandache 循环几何级数行列式;Smarandache 双对称几何级数行列式

中图分类号:O151.22　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1672-2914(2010)04-0001-03

The Generalization of Classes of Smarandache Determinants

YANG Chang-en

(School of Mathematics and Information Science, Xianyang Normal University, Xianyang, Shaanxi　712000, China)

Abstract: In this paper, similar to the Smarandache cyclic determinants, cyclic arithmetic determinants, bisymmetric determinants, the Smarandache cyclic geometric determinants, Smarandache bisymmetric geometric determinants and their generalizations are defined. At the same time, some problems of calculating the Smarandache cyclic geometric determinants and its generalization, as well as the Smarandache bisymmetric geometric determinants are solved, by using the basic properties of determinants.

Key words: Smarandache cyclic determinants; Smarandache bisymmetric determinants; Smarandache cyclic geometric determinants; Smarandache bisymmetric geometric determinants

1　Smarrandache 循环行列式

定义 1　对于任何正整数 n,$n\times n$ 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} \tag{1}$$

称为 n 阶 Smarrandache 循环行列式,表示为 SCND(n)。

定义 2　设 a,d 是复数,$n\times n$ 行列式

$$\begin{vmatrix} a & a+d & \cdots & a+(n-2)d & a+(n-1)d \\ a+d & a+2d & \cdots & a+(n-1)d & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a+(n-2)d & a+(n-1)d & \cdots & a+(n-4)d & a+(n-3)d \\ a+(n-1)d & a & \cdots & a+(n-3)d & a+(n-2)d \end{vmatrix} \tag{2}$$

称为关于数对 (a,d) 的 n 阶 Smarrandache 循环算术级数行列式且表示为 SCAD$(n;a,d)$。

在文献[1]中,Murthy 给出了引理 1、2 的猜测。而在文献[2]中,Maohua Le 证明了关于 SCND(n)与 SCAD$(n;a,d)$的猜测。

引理 1　对于任何正整数 n,

$$\mathrm{SCND}(n)=(-1)^{n/2}n^{n-1}(n+1)/2。\tag{3}$$

引理 2　对于任意正整数 n 与任意复数对 a,d,有

$$\mathrm{SCAD}(n;a,d)=\begin{cases} a, & 当\ n=1 \\ (-1)^{n/2}(nd)^{n-1}(a+(n-1)d)/2, & 当\ n>1 \end{cases} \tag{4}$$

在文献[2]中,Maohua Le 利用已知值的行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_3 & a_4 & \cdots & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n & a_1 \end{vmatrix} = \prod_{x^n=1}(a_1+a_2x+\cdots+a_nx^n) \tag{5}$$

证明了引理 1 与 2。实际上可以直接计算即可。

收稿日期:2009-12-27
基金项目:陕西省科技厅基金项目(2009JQ1009);咸阳师范学院教改项目(200802017,200802018)。
作者简介:杨长恩(1957-),男,陕西周至县人,咸阳师范学院数学与信息科学学院副教授,研究方向为代数与数论研究。

如要计算式(1),只要从最底的第 n 行开始,上一行的 -1 倍加到下一行,而第一行不动,使

$$\mathrm{SCND}(n)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}。$$

然后第 2 列到第 n 列全部加到第一列,再把第一列展开后得到结论,即

$$\mathrm{SCND}(n)=\begin{vmatrix} n(n-1)/2 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1-n & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1}=(-1)^{n/2}n^{n-1}(n+1)/2。$$

同样,式(2)也可用这种方法计算。

把 SCND(n)一般化,有

定义 3 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个复数,$n\times n$ 行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n & a_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix} \tag{6}$$

称为关于参数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 阶 Smarandache 循环行列式且表示为 SCD ($a_1,a_2,\cdots,a_n$)。对于 n 阶 Smarandache 循环几何级数行列式 SCD($a_1,a_2,\cdots,a_n$),应用式(5),可得到

定理 1 对于 n 个任意复数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,

$$\mathrm{SCD}(a_1,a_2,\cdots,a_n)=(-1)^r\prod_{x^n=1}(a_1+a_2x+\cdots+a_nx^{n-1})。\tag{7}$$

其中 $r=\begin{cases} n=2-1, & \text{若 } n \text{ 是偶数} \\ (n-1)/2, & \text{若 } n \text{ 是数奇}。\end{cases}$

SCD($a_1,a_2,\cdots,a_n$)的另一种特殊情况是

定义 4 设 a,q 两个复数,$n\times n$ 行列式

$$\begin{vmatrix} a & aq & \cdots & aq^{n-2} & aq^{n-1} \\ aq & aq^2 & \cdots & aq^{n-1} & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ aq^{n-2} & aq^{n-1} & \cdots & aq^{n-4} & aq^{n-3} \\ aq^{n-1} & a & \cdots & aq^{n-3} & aq^{n-2} \end{vmatrix} \tag{8}$$

称为关于(a,q)的 n 阶 Smarandache 循环几何级数行列式且表示为 SCGD($n;a,q$)。

对于 n 阶 Smarandache 循环几何级数行列式 SCGD($n;a,q$),**有**

定理 2 对于任意正整数 n 与任意复数对 a,q,

$$\mathrm{SCGD}(n;a,q)=(-1)^r a^n(1-q^n)^{n-1}。\tag{9}$$

定理 2 的证明:从式(6)、(8)有

$$\mathrm{SCGD}(n;a,q)=\mathrm{SCD}(a,aq,aq^2,\cdots,aq^{n-1})$$

再由式(7),可以得到

$$\mathrm{SCD}(a,aq,aq^2,\cdots,aq^{n-1})=(-1)^r\prod_{x^n=1}(a+aqx+aq^2x^2+\cdots+aq^{n-1}x^{n-1})=(-1)^r a^n\prod_{x^n=1}(1+qx+q^2x^2+\cdots+q^{n-1}x^{n-1})$$

如果 $x^n=1$,**则** $(1+qx+q^2x^2+\cdots+q^{n-1}x^{n-1})(1-qx)=1-q^n$,**由于** $\prod_{x^n=1}(1-qx)=q^n\prod_{x^n=1}(1/q-x)=q^n(1/q^n-x)=1-q^n$,**可得到式**(9)。**所以定理 2 成立。实际上,引理 1、引理 2、定理 2 都是定理 1 的特殊情况。**

2 Smarandache 双对称行列式

在文献[2]中,有

定义 5 对于任意正整数 n,$n\times n$ 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & n-1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & \cdots & 3 & 2 \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{vmatrix} \tag{10}$$

称为 n 阶 Smarandache 双对称行列式且表示为 SBND(n)。

定义 6 设 a,d 两复数,$n\times n$ 行列式

$$\begin{vmatrix} a & a+d & \cdots & a+(n-2)d & a+(n-1)d \\ a+d & a+2d & \cdots & a+(n-1)d & a+(n-2)d \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a+(n-2)d & a+(n-1)d & \cdots & a+2d & a+d \\ a+(n-1)d & a+(n-2)d & \cdots & a+d & a \end{vmatrix} \tag{11}$$

称为关于(a,d)的 n 阶 Smarandach 双对称算术级数行列式且表示为 SBAD($n;a,d$)。

关于 n 阶 Smarandach 双对称行列式 SBND(n)与 Smarandach 双对称算术级数行列式 SBAD($n;a,d$),Maohua Le **证明了下面的引理 3,引理 4。**

引理 3 对于任意正整数 n,

$$\mathbf{SBND}(n)=(-1)^{n(n-1)/2}2^{n-1}(n+1)。\tag{12}$$

引理 4 对于任意正整数 n 与任意复数对 a,d,

$$\mathrm{SBAD}(n;a,d)=(-1)^{n(n-1)/2}2^{n-2}d^{n-1}[2a+(n-1)d]。\tag{13}$$

定义 7 设 a,d 是复数,$n\times n$ 行列式

$$\begin{vmatrix} a & aq & \cdots & aq^{n-2} & aq^{n-1} \\ aq & aq^2 & \cdots & aq^{n-1} & aq^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ aq^{n-2} & aq^{n-1} & \cdots & aq^2 & aq \\ aq^{n-1} & aq^{n-2} & \cdots & aq & a \end{vmatrix} \tag{14}$$

称为关于 (a,q) 的 n 阶 Smarandache 双对几何级数行列式且表示为 $\mathrm{SBAD}(n;a,q)$。

关于 n 阶 Smarandache 双对称几何级数行列式 $\mathrm{SBGD}(n;a,q)$，有

定理 3 对于任意正整数 n 与复数对 a,d，

$$\mathrm{SBGD}(n;a,q)=\begin{cases} 0, & \text{当 } n=2 \\ (-1)^{n(n-1)/2}a^n q^{n(n-2)(n-1)}(q^2-1)^{n-1}, & \text{当 } n\neq 2 \end{cases} \tag{15}$$

定理 3 的证明：要计算式(14)，只需计算

$$\begin{vmatrix} 1 & q & \cdots & q^{n-2} & q^{n-1} \\ q & q^2 & \cdots & q^{n-1} & q^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ q^{n-2} & q^{n-1} & \cdots & q^2 & q \\ q^{n-1} & q^{n-2} & \cdots & q & 1 \end{vmatrix} \tag{16}$$

由式(14)，当 $n=1$ 或 $n=2$ 时，可得式(15)成立。因此可假定 $n>2$。把式(16)的第 2 列提出公因子 q，第 2 列的 -1 倍加到第 1 列，然后按第 1 列展开，得

$$\begin{vmatrix} 1 & q & \cdots & q^{n-2} & q^{n-1} \\ q & q^2 & \cdots & q^{n-1} & q^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ q^{n-2} & q^{n-1} & \cdots & q^2 & q \\ q^{n-1} & q^{n-2} & \cdots & q & 1 \end{vmatrix} = q(-1)^{n+1}(q^{n-1}-q^{n-3})\cdot$$

$$\begin{vmatrix} 1 & q^2 & \cdots & q^{n-2} & q^{n-1} \\ q & q^3 & \cdots & q^{n-1} & q^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ q^{n-3} & q^{n-1} & \cdots & q^3 & q^2 \\ q^{n-2} & q^{n-2} & \cdots & q^2 & q \end{vmatrix} = q(-1)^{n-1}(q^{n-1}-q^{n-3})q^2(-1)^n\cdot$$

$$(q^{n-2}-q^{n-4})\cdots q^{n-2}(-1)^4(q^2-1)\begin{vmatrix} 1 & q^{n-1} \\ q & q^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{n(n-1)/2}q^{(n-2)(n-1)}(q^2-1)^{n-1}。$$

由此，可得到式(15)。定理 3 从而得证。

推广 $\mathrm{SBND}(n)$ 到一般情形。设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个复数，$n\times n$ 行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & a_3 & a_2 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \end{vmatrix} \tag{17}$$

称为关于参数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的 n 阶 Smarandache 双对称行列式且表示为 $\mathrm{SBD}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$。对于 $\mathrm{SBD}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的计算，还是一个未解决的问题。

参考文献：

[1]Murthy A.Smarandache determinant sequences [J].Smarandache Notions Journal,2001(12):275-278.
[2]Maohua L.Two classes of smarandache determinants [J].Scientia Magna,2006,2(1),20-25.
[3]杨长恩.Fibonacci 数列与对角形行列式[J].咸阳师范学院学报，2007，22(4)：3-5.