PROPRIETĂŢI ALE CERCURILOR ADJUNCTE UNUI TRIUNGHI

Prof. Ion Pătraşcu, Colegiul Naţional Fraţii Buzeşti, Craiova, Romania
Prof. Univ. Dr. Florentin Smarandache, University of New Mexico, U.S.A.

Proprietăţile prezentate în acest articol se referă la axele radicale şi la centrele radicale ale cercurilor adjuncte unui triunghi.

Definiţia 1. Fiind dat un triunghi ABC, spunem despre cercul care trece prin vârfurile C, A şi este tangent în A laturii AB că este un cerc adjunct triunghiului.

Observaţii. a) Cercul din definiţia precedentă îl notam CĀ
b) Unui triunghi îi corespund în general 6 cercuri adjuncte diferite. Dacă triunghiul este isoscel acesta are 5 cercuri adjuncte diferite, iar dacă este echilateral există trei cercuri adjuncte diferite asociate triunghiului.

Teorema 1. (A. L. Crelle, 1816)

i). Cercurile adjuncte $C\overline{A},\ A\overline{B},\ B\overline{C},$ ale triunghiului oarecare ABC au un punct comun Ω cu proprietatea: $\angle\Omega AB \equiv \angle\Omega BC \equiv \angle\Omega CA$

ii). Cercurile adjuncte $A\overline{C},\ C\overline{B},\ B\overline{A},$ ale triunghiului oarecare ABC au un punct comun Ω' cu proprietatea : $\angle\Omega' AC \equiv \angle\Omega' BA \equiv \angle\Omega' CB$

Demonstraţie i):

Fie Ω al doilea punct de pe intersecţie al cercurilor $C\overline{A}$ si $A\overline{B}$, (vezi fig.1).
Avem:
$\angle\Omega CA \equiv \angle\Omega AB$ *şi* $\angle\Omega AB \equiv \angle\Omega BC$.
Într-adevăr primele unghiuri au ca masură jumatate din masura arcului $A\Omega$, iar cele din a doua congruenţă au ca masură jumatate din masura arcului $B\Omega$.

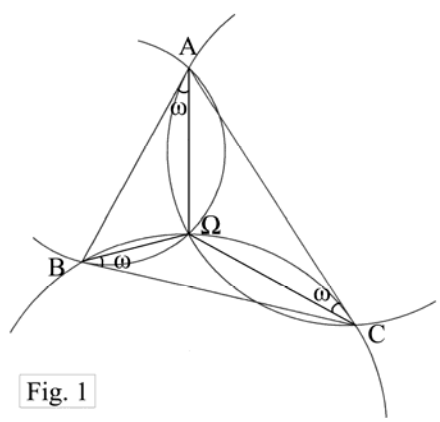


Fig. 1

Obţinem că:
$\angle\Omega AB \equiv \angle\Omega BC \equiv \angle\Omega CA$.

Relaţia $\angle\Omega BC \equiv \angle\Omega CA$ arată că cercul circumscris triunghiului $B\Omega C$ este tangent in C laturii AC şi este prin urmare cercul adjunct $B\overline{C}$.

Observaţii:
a). Analog se demonstrează ii)

b). Punctul Ω se numeşte primul punct al lui Brocard(1), iar Ω' se numeşte al doilea punct al lui Brocard

c). Punctul lui Brocard Ω este centrul radical al cercurilor adjuncte $C\overline{A},\ A\overline{B},\ B\overline{C},$ iar punctul lui Brocard Ω' este centrul radical al cercurilor adjuncte $A\overline{C},\ C\overline{B},\ C\overline{A},$ ale triunghiului ABC.

Într-adevăr atât Ω cât şi Ω' au puteri egale (nule) faţă de tripletele de cercuri adjuncte indicate, şi prin urmare sunt centrele lor radicale.

<u>Teorema 2.</u> Punctele lui Brocard Ω si Ω' sunt puncte izogonale în triunghiul ABC.

<u>Demonstraţie:</u>

Notăm $m(\angle \Omega AB)=\omega$.

Aplicând teorema sinusurilor în triunghiurile $A\Omega B$ si $A\Omega C$ obţinem:

$$\frac{B\Omega}{\sin\omega}=\frac{c}{\sin(B\Omega A)}=\frac{A\Omega}{\sin(B-\omega)}$$

şi $\dfrac{A\Omega}{\sin\omega}=\dfrac{b}{\sin(A\Omega C)}$.

Deoarece $m(\angle B\Omega A)=180^{O}-m(\angle B)$;

$m(\angle A\Omega C)=180^{O}-m(\angle A)$, rezultă că:

$$\frac{A\Omega}{B\Omega}=\frac{b}{c}\frac{\sin B}{\sin A}=\frac{\sin(B-\omega)}{\sin\omega}$$

Dezvoltând $\sin(B-\omega)$ şi ţinând cont că $\dfrac{b}{c}=\dfrac{\sin B}{\sin C}$ şi $\sin(A+C)=\sin B$ se obţine:

$ctg\omega=ctgA+ctgB+ctgC$.

Dacă vom nota $m(\angle \Omega' AC)=\omega'$, raţionând analog rezultă : $ctg\omega'=ctgA+ctgB+ctgC$.

Relaţiile precedente conduc la $\omega=\omega'$ ceea ce arată că Ω şi Ω' sunt puncte izogonale.

<u>Observaţie.</u> Unghiul ω se numeşte unghiul lui Brocard şi apare în multe formule şi relaţii legate de geometria triunghiului (vezi[1]).

<u>Teorema 3.</u> Cercurile adjuncte $C\overline{A}$ si $B\overline{A}$ se intersecteaza pe simediana din A a triunghiului ABC.

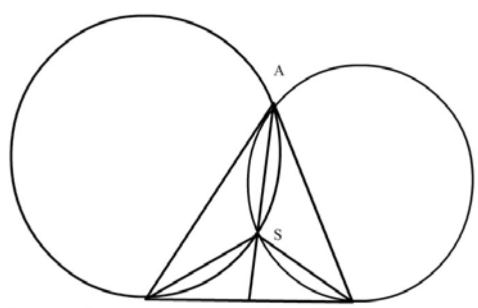


Fig. 2

<u>Demonstraţie:</u>

Fie S al doilea punct de intersecţie al cercurilor $C\overline{A}$ si $B\overline{A}$ (vezi fig.2) si $\{P\}=AS\cap BC$.

Observăm că $\angle SCA\equiv\angle SAB$ şi $\angle SBA\equiv\angle SAC$ prin urmare $\Delta SBA\sim\Delta SAC$, de unde obţinem : $\dfrac{SB}{SC}=\dfrac{AB^2}{AC^2}$ (1)

Pe de altă parte din congruenţele unghiulare amintite obţinem: $\angle BSP\equiv\angle CSP$, iar cu teorema bisectoarei în triunghiul BSC rezultă că: $\dfrac{SB}{SC}=\dfrac{PB}{PC}$ (2)

Din (1) si (2) rezulta $\dfrac{PB}{PC}=\dfrac{AB^2}{AC^2}$ ceea ce arată că AP este simediana din A a triunghiului ABC.

Observaţie. Teorema 3 exprimă faptul că două cercuri adjuncte care sunt tangente la două laturi ale unui triunghi, într-un vârf comun acestor laturi au ca axă radicală simediana triunghiului dusă din acel vârf.

Teorema 4. Cercurile adjuncte $A\overline{B}$ si $A\overline{C}$ se intersectează pe mediana din A a triunghiului ABC.

Demonstratie:

Fie D al doilea punct de intesecţie al cercurilor $A\overline{B}$ şi $A\overline{C}$ şi $\{M\} = AD \cap BC$. Dreapta AD este axa radicală a cercurilor $A\overline{B}$ şi $A\overline{C}$, avem $MB^2 = MD \cdot MA = MC^2$, rezultă că M este mijlocul lui (BC).

Observaţii.

a). Teorema 4 exprimă faptul că două cercuri adjuncte ale unui triunghi,tangente la acelaşi latură ,au ca axă radicală mediana opusă respectivei laturii.

b). Din cele demonstrate rezultă că axele radicale a două cercuri adjuncte unui triunghi pot fi : cevienele Brocard $A\Omega$, $A\Omega'$, etc, simedianele triunghiului, medianele triunghiului sau laturile triunghiului. Într-adevăr, dacă considerăm într-un triunghi oarecare cercurile adjuncte $B\overline{C}$ şi $C\overline{B}$ axa lor radicală este latura BC.

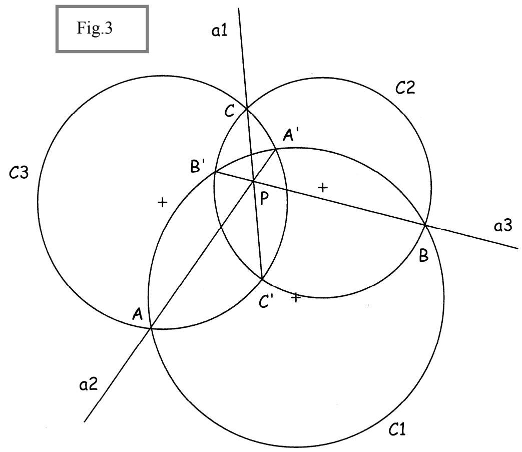
c). Relativ la centrele radicale ale cercurilor adjuncte am demonstrat că Ω şi Ω' au această calitate. Deoarece în general un triunghi are 6 cercuri adjuncte, înseamnă că există $C_6^3 = 20$ de centre radicale corespunzătoare tripletelor diferite de cercuri adjuncte.

d). Vârfurile triunghiului ABC sunt centre radicale ale anumitor triplete de cercuri adjuncte. Într-adevăr de exemplu, vârful C al triunghiului ABC este centrul radical al cercurilor adjuncte $B\overline{C}$, $C\overline{B}$ şi $A\overline{C}$ pentru că trec toate prin acelaşi vârf C. De asemenea C este centrul radical al cercurilor $B\overline{C}$, $C\overline{B}$ şi $C\overline{A}$ precum şi al cercurilor $B\overline{C}$,

Teorema 5. (L. Carnot-1803)
Coardele comune a trei cercuri secante două câte două sunt concurente.

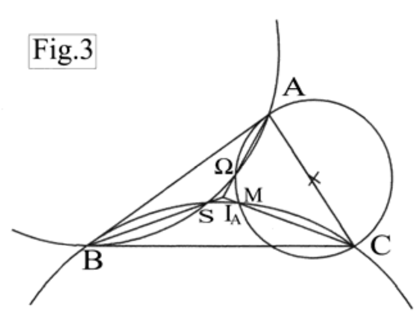
Demonstraţie:
Fie C_1, C_2, C_3 trei cercuri secante si a_1, a_2, a_3 axele radicale ale cercurilor (C_2, C_3), (C_1, C_3) respectiv (C_1, C_2) (vezi figura 3.)
Notăm P intersecţia dintre a_1 si a_2 rezultă că P va avea puteri egale faţă de toate cercurile, prin urmare P va fi situat şi pe axa radicală a_3 a cercurilor (C_1, C_2).

Fig.3



Teorema 6. (R.A.Johnson - 1929) Într-un triunghi ABC ceviana $A\Omega$, simediana din B şi mediana din C sunt concurente.

Fig.3



Demonstrație:

Construim cercurile $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ si $\overline{CB}$.

Fig.4

Conform teoremei 1, al doilea punct de intersecţie al cercurilor $\overline{CA}$ şi $\overline{AB}$ este Ω, din teorema 2 rezultă că al doilea punct comun cercurilor $\overline{AB}$ şi $\overline{CB}$ este, S, situat pe simediana din B (vezi fig. 4), iar conform teoremei 3, cercurile $\overline{CA}$ şi $\overline{CB}$ se intersectează a doua oară în M, care aparţine medianei din C a triunghiului ABC. Teorema Carnot afirmă că cevienele $A\Omega$, BS şi CM sunt concurente. Am notat punctul de concurenţă cu I_A.

Observaţii

a) Punctul I_A este centrul radical al cercurilor adjuncte $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, $\overline{CB}$.
b) Teorema 6 se poate demonstra şi folosind reciproca teoremei lui Ceva; pentru acesta trebuie calculat $\frac{BA_1}{A_1C}$, unde $\{A_1\} = A\Omega \cap BC$, se găseşte $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{AC^2}{BC^2}$
c) În acelaşi mod putem enunţa şi demonstra următoarele teoreme:

Teorema 7. Ceviana BΩ, simediana din C şi mediana din A sunt concurente într-un punct I_B care este centrul radical al cercurilor adjuncte $\overline{AC}, \overline{CB}, \overline{AB}$ triunghiului ABC.

Teorema 8. Ceviane CΩ, simediana din A şi mediana din B ale triunghiului ABC sunt concurente într-un punct I_C care este centrul radical al cercurilor adjuncte $\overline{CA}, \overline{BC}, \overline{BA}$.

Teorema 9. Ceviana AΩ', simediana din C şi mediana din B ale triunghiului ABC sunt concurente într-un punct, I_A' care este centrul radical al cercurilor adjuncte $\overline{AC}, \overline{BC}, \overline{BA}$.

Teorema 10. Ceviana BΩ', simediana din A şi mediana din C ale triunghiului ABC sunt concurente într-un punct I_B' care este centrul radical al cercurilor $\overline{BA}, \overline{CB}, \overline{CA}$.

Teorema 11. Ceviana CΩ', simediana din B şi mediana din A ale triunghiului ABC sunt concurente într-un punct I_C' care este centrul radical al cercurilor adjuncte $\overline{AC}, \overline{CB}, \overline{AB}$.

Obsevaţie: Dacă triunghiul ABC este isoscel, AB=AC ,atunci cercul adjunct $\overline{BC}$ coincide cu cercul adjunct $\overline{CB}$ şi obţinem teorema:

> În triunghiul isoscel ABC, AB=AC, simediana din B şi mediana din C se intersectează în punctul lui Brocard Ω. Vezi [3]

Bibliografie:

[1] Mihăileanu, N.N. Lecţii complementare de geometrie, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti 1976; p 56 -57

[2] Johson, R. A. Modern Geometry: An Elementary Treatise on the Geometry of the Triangle and the Circle. Boston, MA: Houghton Mifflin, pp. 263/286, 1929

[3] Pătraşcu, I. O teoremă relativă la punctul lui Brocord, Gazeta Matematică anul LXXXIX, nr. 9/1984, p. 328 -329.