DOI:10.13338/j.issn.1006-8341.2013.03.017

第26卷第3期 纺织高校基础科学学报 Vol. 26, No. 3
2013年9月 BASIC SCIENCES JOURNAL OF TEXTILE UNIVERSITIES Sept., 2013

文章编号:1006-8341(2013)03-0323-05

一个关于 Smarandache LCM 对偶函数的方程

赵娜娜

(西北大学 数学系,陕西 西安 710127)

摘要: $\forall n \in \mathbf{N}_+$,著名的 Smarandache LCM 函数的对偶函数定义为 $SL*(n)=\max\{k \mid [1,2,\cdots,k] \mid n, k\in \mathbf{N}_+\}$,$\Omega(n)$ 表示 n 的所有素因子的个数. 利用初等数论和分类讨论的方法研究了一个包含 $SL*(n)$ 及素因子函数方程 $\sum_{d\mid n}\frac{1}{SL*(d)}=\Omega(n)$ 的可解性,并给出了这个方程的所有正整数解的具体形式.

关键词:Smarandache LCM 对偶函数;Ω 函数;方程;正整数解

中图分类号:O 156.4 **文献标识码**:A

1 引言及结论

$\forall n \in \mathbf{N}_+$,F. Smarandache LCM 函数 $SL(n)$[1] 的定义为

$$SL(n)=\min\{k \mid k\in \mathbf{N}_+, n \mid [1,2,\cdots,k]\}.$$

这里 $[1,2,\cdots,k]$ 表示 $1,2,\cdots,k$ 的最小公倍数,$\mathbf{N}_+$ 表示所有正整数的集合,其对偶函数定义为

$$SL*(n)=\max\{k \mid k\in \mathbf{N}_+, [1,2,\cdots,k] \mid n\}.$$

由定义很容易计算前几个值 $SL*(1)=1, SL*(2)=2, SL*(3)=1, SL*(4)=2, SL*(5)=1, SL*(6)=3, SL*(7)=1,\cdots$. 关于 $SL*(n)$ 的算术性质,许多学者进行了研究,获得了不少有趣的结果[2-9]. 例如,田呈亮在文献[4]中研究了 $SL*(n)$ 的性质,得到当 n 为奇数时,$SL*(n)=1$;当 n 为偶数时,$SL*(n)\geqslant 2$. 并研究了函数方程 $\sum_{d\mid n}SL*(d)=n$ 和 $\sum_{d\mid n}SL*(d)=\Phi(n)$ 的可解性,得出前者只有惟一的正整数解 $n=1$,后者的正整数解为 $n=1,3,14$. 此外,王妤在文献[5]中研究了 $\sum_{d\mid n}SL*(d)=\sum_{d\mid n}S*(d)$,并得出其正整解. 吴欣在文献[6-7]中研究了方程 $SL*(n)=Z*(n)$ 和 $Z*(n)+Z(n)=n$ 的正整数解. 陈斌在文献[8-9]中研究了方程 $\sum_{d\mid n}\frac{1}{S*(d)}=2\Omega(n)$ 和 $\sum_{d\mid n}\frac{1}{S*(d)}=3\Omega(n)$ 的正整数解. 前者的正整数解 n 为奇数时,$n=p, n=p^{\alpha}q$,其中 $\alpha\geqslant 1$,p,q 为奇素数;n 为偶数时,$n=2^4 3^{30}, n=2^6 3^{12}, n=8p^7, n=16p^5, n=64p^4, n=2pq$,其中 $p,q\geqslant 5$ 为奇素数. 后者的奇数解 $n=p^3q^5$,其中 p,q 为奇素数;

收稿日期:2013-05-11

基金项目:陕西省教育厅科学研究项目(11JK0470)

作者简介:赵娜娜(1989-),女,陕西省渭南市人,西北大学硕士研究生,主要从事基础数学研究. E-mail:znxts@foxmail.com

偶数解为 $n=2^8 3^{114}$，$n=2^{10}3^{36}$，$n=2^{16}3^{18}$，$n=2^{\alpha}p^2$，$n=2pqr$，其中 $\alpha>1$，$p,q,r>3$ 为奇素数.

本文利用初等数论和分类讨论的方法研究函数方程

$$\sum_{d|n}\frac{1}{SL*(d)}=\Omega(n) \qquad (*)$$

的正整数解，并得到了其所有的正整数解. 其中 $\Omega(n)$ 为 n 的所有素因子个数和（包括重数），即若 n 的标准分解为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$，则 $\Omega(n)=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k$，本文即证得下面的定理.

定理1 方程（*）无奇数解；所有偶数解为 $n=4$，$n=9\cdot 2^{\alpha}$，$n=2^{\alpha}p$，其中 $\alpha\geqslant 2$ 且 $p\geqslant 5$ 且 p 为素数.

2 定理1的证明

证明 当 $n=1$ 时，$\sum\limits_{d|n}\frac{1}{SL*(d)}=1$，$\Omega(n)=0$，显然 $n=1$ 不是方程（*）的解，下面设 $n>1$.

（1）当 $n>1$ 且为奇数时，设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$，$\alpha_i\geqslant 1$，$i=1,2,3,\cdots,k$，此时显然对 n 的每一个因子 d 必为奇数，即 $2\nmid d$，故 $SL*(d)=1$，于是 $\Omega(n)=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k$，

$$\sum_{d|n}\frac{1}{SL*(d)}=\sum_{d|n}1=d(n)=(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_k),$$

则原方程等价于

$$\Omega(n)=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k=(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_k). \qquad (1)$$

（ⅰ）当 $k=1$ 时，$1+\alpha_1>\alpha_1$.

（ⅱ）假设当 $k=m$ 时成立，即 $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_m)>\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m$.

（ⅲ）当 $k=m+1$ 时，

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_{m+1})>(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m)(1+\alpha_{m+1})>\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{m+1}.$$

由数学归纳法知，对每一个正整数 n，式(1)左边都大于右边，故方程（*）无奇数解.

（2）当 n 为偶数时，设 $n=2^{\alpha}\cdot m$，$m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$，$\alpha\geqslant 1$，$p_1<p_2<\cdots<p_k$，下分 $m=1$ 和 $m>1$ 2种情况讨论：

（ⅰ）若 $m=1$ 时，$n=2^{\alpha}$，$\Omega(n)=\alpha$，同时 $\sum\limits_{d|n}\frac{1}{SL*(d)}=1+\sum\limits_{d|2^{\alpha},d>1}\frac{1}{SL*(d)}=1+\frac{\alpha}{2}$，故原方程等价于 $1+\frac{\alpha}{2}=\alpha$，解得 $\alpha=2$，故 $n=4$ 是原方程的偶数解.

（ⅱ）当 $m>1$ 时，分 $\alpha=1$ 和 $\alpha>1$ 两种情况，具体分析如下：

(a) 当 $\alpha=1$ 时，即 $n=2m$，$m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$，$k\geqslant 1$，由于 $3\mid m$ 与 $3\nmid m$ 时 $SL*(n)$ 的值不同，故分下面2种情况：

① 当 $3\mid m$ 时，$n=2\cdot 3^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$.

当 $k=1$ 时，$n=2\cdot 3^{\alpha_1}$，此时 $\Omega(n)=1+\alpha_1$，

$$\sum_{d|n}\frac{1}{SL*(d)}=\sum_{d|2\cdot 3^{\alpha_1}}\frac{1}{SL*(d)}=1+\frac{1}{SL*(2)}+\sum_{i=1}^{\alpha_1}\frac{1}{SL*(3^i)}+\sum_{i=1}^{\alpha_1}\frac{1}{SL*(2\cdot 3^i)}=$$
$$\frac{3}{2}+\frac{4}{3}\alpha_1.$$

则原方程等价于 $1+\alpha_1=\frac{3}{2}+\frac{4}{3}\alpha_1$，解得 $\alpha_1=-\frac{3}{2}$，矛盾，故此时方程（*）无正整数解.

当 $k=2$ 时，$n=2\cdot 3^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$，此时，$\Omega(n)=1+\alpha_1+\alpha_2$.

$$\sum_{d|n}\frac{1}{SL*(d)}=\sum_{d|2\cdot 3^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}}\frac{1}{SL*(d)}=$$
$$1+\sum_{i=1}^{\alpha_1}\frac{1}{SL*(3^i)}+\frac{1}{SL*(2)}+\sum_{i=1}^{\alpha_1}\frac{1}{SL*(2\cdot 3^i)}+\sum_{i=1}^{\alpha_2}\frac{1}{SL*(p_2^i)}+$$

$$\sum_{i=1}^{\alpha_2}\frac{1}{SL*(2\cdot p_2^i)}+\sum_{i=1}^{\alpha_1}\sum_{j=1}^{\alpha_2}\frac{1}{SL*(3^ip_2^j)}+\sum_{i=1}^{\alpha_1}\sum_{j=1}^{\alpha_2}\frac{1}{SL*(2\cdot 3^ip_2^j)}=$$
$$\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}\alpha_1\right)(1+\alpha_2).$$

显然 $(2/3+(4/3)\alpha_1)(1+\alpha_2)>1+\alpha_1+\alpha_2$，故此时方程(*)无正整数解.

当 $k\geqslant 3$ 时，$n=2\cdot 3^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$，此时 $\Omega(n)=1+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k$，

$$\sum_{d|n}\frac{1}{SL*(d)}=\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}\alpha_1\right)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)\cdots(1+\alpha_k).$$

用数学归纳法易证，$\sum_{d|n}\frac{1}{SL*(d)}>\Omega(n)$，故方程(*)无正整数解.

② 当 $3\nmid m$ 时，$n=2\cdot p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$，$5\leqslant p_1<p_2<\cdots<p_k$，$\Omega(n)=1+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k$，

$$\sum_{d|n}\frac{1}{SL*(d)}=\frac{3}{2}(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_k).$$

原方程转化为

$$\frac{3}{2}(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_k)=1+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k.$$

用数学归纳法很容易证得，对于 $n=2\cdot p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 时，

$$\frac{3}{2}(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_k)>1+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k.$$

(b) 当 $\alpha\geqslant 2$，$n=2^\alpha p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$，$3\leqslant p_1<p_2<\cdots<p_k$.

① 当 $3\mid m$ 时，分情况如下：

当 $k=1$ 时，则 $n=2^\alpha 3^{\alpha_1}$，此时 $\Omega(n)=\alpha+\alpha_1$.

$$\sum_{d|n}\frac{1}{SL*(d)}=\sum_{d|2^\alpha 3^{\alpha_1}}\frac{1}{SL*(d)}=$$
$$1+\sum_{i=2}^{\alpha}\frac{1}{SL*(2^i)}+\sum_{i=1}^{\alpha_1}\frac{1}{SL*(3^i)}+\sum_{i=2}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\alpha_1}\frac{1}{SL*(2^i\cdot 3^j)}=$$
$$1+\frac{\alpha-1}{2}+\alpha_1+\frac{(\alpha-1)\alpha_1}{4}.$$

故原方程可转化为

$$1+\frac{\alpha-1}{2}+\alpha_1+\frac{(\alpha-1)\alpha_1}{4}=\alpha+\alpha_1. \tag{2}$$

解得满足式(2)的正整数解为 $\alpha_1=2$，故方程(*)有解当且仅当 $n=2^\alpha 3^2(\alpha\geqslant 2)$.

当 $k=2$ 时，即 $n=2^\alpha 3^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$，$p_2\geqslant 5$，分 2 种情况讨论：

当 $p_2=5$ 时，即 $n=2^\alpha 3^{\alpha_1}5^{\alpha_2}$，此时 $\Omega(n)=\alpha+\alpha_1+\alpha_2$，而

$$\sum_{d|n}\frac{1}{SL*(d)}=\sum_{d|2^\alpha 3^{\alpha_1}5^{\alpha_2}}\frac{1}{SL*(d)}=$$
$$1+\sum_{i=2}^{\alpha}\frac{1}{SL*(2^i)}+\sum_{i=1}^{\alpha_1}\frac{1}{SL*(3^i)}+\sum_{i=1}^{\alpha_2}\frac{1}{SL*(5^i)}+\sum_{i=2}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\alpha_1}\frac{1}{SL*(2^i\cdot 3^j)}+$$
$$\sum_{i=2}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\alpha_2}\frac{1}{SL*(2^i\cdot 5^j)}+\sum_{i=1}^{\alpha_1}\sum_{j=1}^{\alpha_2}\frac{1}{SL*(3^i\cdot 5^j)}+\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\alpha_1}\sum_{k=1}^{\alpha_2}\frac{1}{SL*(2^i\cdot 3^j\cdot 5^k)}=$$
$$1+\frac{\alpha-1}{2}+\alpha_1+\alpha_2+\frac{(\alpha-1)\alpha_1}{4}+\frac{(\alpha-1)\alpha_2}{2}+\alpha_1\alpha_2+\frac{(\alpha-1)\alpha_1\alpha_2}{6}.$$

则原方程可转化为

$$1+\frac{\alpha-1}{2}+\alpha_1+\alpha_2+\frac{(\alpha-1)\alpha_1}{4}+\frac{(\alpha-1)\alpha_2}{2}+\alpha_1\alpha_2+\frac{(\alpha-1)\alpha_1\alpha_2}{6}=\alpha+\alpha_1+\alpha_2.$$

化简得

$$6\alpha(\alpha_2-1)+3\alpha_1(\alpha-1)+\alpha_2(10\alpha_1-6)+2\alpha\alpha_1\alpha_2+6=0,$$

很显然此不定方程无正整数解,故此时方程(*)无正整数解.

当 $p_2>5$ 时,即 $n=2^{\alpha}3^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$,此时 $\Omega(n)=\alpha+\alpha_1+\alpha_2$,同理

$$\sum_{d|n}\frac{1}{SL*(d)}=\sum_{d|2^{\alpha}3^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}}\frac{1}{SL*(d)}=$$

$$1+\frac{\alpha-1}{2}+\alpha_1+\alpha_2+\frac{(\alpha-1)\alpha_1}{4}+\frac{(\alpha-1)\alpha_2}{2}+\alpha_1\alpha_2+\frac{(\alpha-1)\alpha_1\alpha_2}{4}.$$

则原方程可转化为

$$1+\frac{\alpha-1}{2}+\alpha_1+\alpha_2+\frac{(\alpha-1)\alpha_1}{4}+\frac{(\alpha-1)\alpha_2}{2}+\alpha_1\alpha_2+\frac{(\alpha-1)\alpha_1\alpha_2}{4}=\alpha+\alpha_1+\alpha_2.$$

化简得

$$\alpha_1(\alpha-1)+2\alpha(\alpha_2-1)+\alpha_2(\alpha_1\alpha-2)+2+3\alpha_1\alpha_2=0.$$

很显然此不定方程无正整数解,故此时方程(*)无正整数解.

同理可证当 $k\geqslant 3$ 时,即 $n=2^{\alpha}3^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}\cdots p_k^{\alpha_k}$,方程(*)也无正整数解.

② 当 $3\nmid m$ 时,此时 $n=2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$, $5\leqslant p_1<p_2<\cdots<p_k$,分情况讨论如下:

当 $k=1$ 时,则 $n=2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}$,此时 $\Omega(n)=\alpha+\alpha_1$,而

$$\sum_{d|n}\frac{1}{SL*(d)}=\sum_{d|2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}}\frac{1}{SL*(d)}=$$

$$1+\sum_{i=2}^{\alpha}\frac{1}{SL*(2^i)}+\sum_{i=1}^{\alpha_1}\frac{1}{SL*(p_1{}^i)}+\sum_{i=2}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\alpha_1}\frac{1}{SL*(2^i\cdot p_1^j)}=$$

$$(1+\alpha)(1+\alpha_1)/2.$$

原方程等价于不定方程 $(1+\alpha)(1+\alpha_1)/2=\alpha+\alpha_1$,化简得 $1+\alpha\alpha_1=\alpha+\alpha_1$. 解得此不定方程的正整数解为 $\alpha=1,\alpha_1\in\mathbf{N}$ 或 $\alpha\in\mathbf{N},\alpha_1=1$,由于 $\alpha\geqslant 2$,故此时满足方程(*)的正整数解为 $n=2^{\alpha}p(\alpha\geqslant 2,p\geqslant 5)$.

当 $k=2$ 时,则 $n=2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$,此时 $\Omega(n)=\alpha+\alpha_1+\alpha_2$,而

$$\sum_{d|n}\frac{1}{SL*(d)}=\sum_{d|2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}}\frac{1}{SL*(d)}=$$

$$1+\sum_{i=2}^{\alpha}\frac{1}{SL*(2^i)}+\sum_{i=1}^{\alpha_1}\frac{1}{SL*(p_1^i)}+\sum_{i=1}^{\alpha_2}\frac{1}{SL*(p_2^i)}+\sum_{i=2}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\alpha_1}\frac{1}{SL*(2^i\cdot p_1^j)}+$$

$$\sum_{i=2}^{\alpha}\sum_{j=2}^{\alpha_2}\frac{1}{SL*(2^ip_2^j)}+\sum_{i=1}^{\alpha_1}\sum_{j=1}^{\alpha_2}\frac{1}{SL*(p_1^i\cdot p_2^j)}+\sum_{i=2}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\alpha_1}\sum_{k=1}^{\alpha_2}\frac{1}{SL*(2^ip_1^jp_2^k)}=$$

$$(\alpha+1)(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)/2.$$

故原方程等价于 $(\alpha+1)(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)=2(\alpha+\alpha_1+\alpha_2)$,此时方程(*)无正整数解,因为

$$(\alpha+1)(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)-2(\alpha+\alpha_1+\alpha_2)=$$

$$\alpha_2(\alpha-1)+\alpha_1(\alpha-1)+\alpha(\alpha_1\alpha_2-1)+\alpha_1\alpha_2+1>0.$$

当 $k\geqslant 3$ 时,则 $n=2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,$(\alpha\geqslant 2,p_1\geqslant 5)$,此时 $\Omega(n)=\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k$,

$$\sum_{d|n}\frac{1}{SL*(d)}=(\alpha+1)(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_3)/2.$$

下用数学归纳法证 $(\alpha+1)(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_k)>2(\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k)$.

当 $k=m$ 时,假设

$$(\alpha+1)(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_m)>2(\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m).$$

当 $k=m+1$ 时,

$$(\alpha+1)(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_m)(1+\alpha_{m+1})>$$

$$2(\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m)(1+\alpha_{m+1})=$$

$$2(\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m)+2\alpha_{m+1}(\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m)>$$

$$2(\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m+\alpha_{m+1}).$$

故此时方程(*)无正整数解.

综合上述(1)和(2)的讨论情况,定理得证.

参考文献:

[1] SMARANDACHE F. Only problems, not solutions[M]. Chicage: Xiquan Publ House, 1993.

[2] 郭晓艳,袁霞. 关于 Smarandache 问题研究的新进展[M]. USA: High American Press, 2010: 93-100.

[3] LE Maohua. An equation concerning the Smarandache LCM function[J]. Smarandache Notions Journal, 2004, 14: 186-188.

[4] TIAN Chengliang. Two equations involving the Smarandache LCM function[J]. Scientia Magna, 2007, 3(2): 80-85.

[5] 王妤. 一个包含 Smarandache LCM 对偶函数的方程[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2008, 25(5): 645-647.

[6] 吴欣. 关于伪 Smarandache 对偶函数的一个方程[J]. 内蒙古师范大学学报:自然科学汉文版, 2010, 39(6): 557-559.

[7] 吴欣. 关于伪 Smarandache 函数及其对偶函数的可解性[J]. 西南大学学报:自然科学版, 2011, 33(8): 102-105.

[8] 陈斌. 包含 Smarandache 对偶函数的方程的正整数解[J]. 天津师范大学学报:自然科学版, 2012, 32(3): 6-8.

[9] 陈斌. 一个包含 Smarandache 对偶函数的方程[J]. 西南大学学报:自然科学版, 2012, 34(12): 92-96.

An equation involving the Smarandache LCM dual function

ZHAO Na-na

(Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China)

Abstract: For any positive integer n, the well-know Smarandache LCM dual function was defined as $SL*(n)=\max\{k \mid [1,2,\cdots,k] \mid n, k\in \mathbf{N}_+\}$, $\Omega(n)$ was the number of all the prime factors of n. By using the elementary number theory and classification discussion methods to study the solvability of the equation $\sum_{d|n}\frac{1}{SL*(d)}=\Omega(n)$ involving $SL*(n)$ and prime factor function, and the specific forms of all the positive integer solutions were obtained.

Key words: Smarandache LCM dual function; Ω function; equation; positive integer solution

编辑:武　晖;校对:师　琅