DOI :10.16152/j.cnki.xdxbzr.2007.02.007
西北大学学报(自然科学版)
2007年4月,第37卷第2期,Apr.,2007,Vol.37,No.2
Journal of Northwest University (Natural Science Edition)

一个包含Smarandache函数的方程

刘燕妮

(西北大学 数学系,陕西 西安 710069)

摘要:目的 应罗马尼亚数论专家F.Smarandache教授的要求,求证一个包含Smarandache函数的方程的性质。方法 利用初等方法和解析方法。结果 解得这个方程的性质。获得了这个方程解的个数的渐近公式。结论 发展了F.Smarandache教授在Only Problems, Not Solution一书(Xiquan Publishing House, 1993)中涉及的相关研究工作。

关 键 词:Smarandache函数;方程;渐近公式
中图分类号:O156.4 文献标识码:A 文章编号:1000-274X(2007)02-0197-02

设 n 为任意正整数,定义数论函数 $S(n)$ 为

$$S(n)=\min\{m:m\in N,n\mid m!\}。$$

若 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 是 n 的标准素因数分解式,则有

$$S(n)=\max_{1\leqslant i\leqslant k}\{S(p_i^{\alpha_i})\}。$$

关于 $S(n)$ 的算术性质,许多学者曾进行过研究[1-4],用集合 $A=A(k)$ 表示所有满足方程 $n=S(n^k)$ 的正整数 n 的集合。本文的主要目的是利用初等方法研究方程 $n=S(n^k)$ 的解数问题,并给出这个方程解数的渐近公式。即证明下面的

定 理 设 k 为任意给定的正整数,则对任意实数 $x\geqslant 1$,方程 $n=S(n^k)$ 的解数满足渐近公式

$$U(x,k)=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}1=\pi\left(\frac{x}{k}\right)+O(1)=$$

$$\frac{x}{k\ln x}+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)。$$

证 明 首先,设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t}$ 是 n 的标准素因数分解式,有

$$S(n)=\max_{1\leqslant i\leqslant t}\{S(p_i^{\alpha_i})\}=S(p^{\alpha})。$$

对于方程 $n=S(n^k)$ 的解,分3种情况讨论。

1)如果 $k=1$,那么方程就成为 $n=S(n)$,得到 $n=1$ 和 $n=p$ 是方程的解,所以 $U(x,1)=\pi(x)+1$,即定理成立。

2)如果 $k=2$,那么方程就变为 $n=S(n^2)$,即 $S(n^2)=S(p^{2\alpha})=n$,$n=1$ 显然是方程的解,如果 $n>1$,可以分以下3种情况讨论。

(a)如果 $\alpha=1$,$S(n^2)=S(p^2)=n=n_1p$,且 $(n_1,p)=1$,当 $p>2$ 时,$S(p^2)=2p=n_1p$,那就可得 $n_1=2$,因此当 $p>2$ 时,$n=2p$ 即是方程的解。

(b)如果 $\alpha=2$,$S(n^2)=S(p^4)=n=n_1p^2$,且 $(n_1,p)=1$,当 $p>4$ 时,$S(p^4)=4p=n_1p^2$,就可得 $n_1p=4$,这与 $p>4$ 矛盾,因此这时方程无解。当 $p=2$,$S(p^4)=S(2^4)=6\neq 2^2$,所以 $n=4$ 不是方程的解。当 $p=3$,$S(p^4)=S(3^4)=9=3^2$,所以 $p=3$,即 $n=9$ 是方程的解。

(c)如果 $\alpha\geqslant 3$ 且 $p>2$ 时,$S(n^2)=S(p^{2\alpha})\leqslant 2\alpha p<p^{\alpha}\leqslant n$,用数学归纳法证明 $p^{\alpha}>2\alpha p$,所以此时 $S(n^2)\neq n$,方程无解。

综上所述,当 $k=2$ 时,方程 $n=S(n^2)$ 的解是 $n=1$,$n=9$ 和 $n=2p$,所以 $U(x,2)=2+\pi(x/2)$。定理同样成立。

3)如果 $k\geqslant 3$ 来讨论方程 $n=S(n^k)$ 的解。$n=1$ 显然是方程的解,如果 $n>1$,设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t}$,

$$S(n)=\max_{1\leqslant i\leqslant t}\{S(p_i^{\alpha_i})\}=S(p_1^{\alpha_1})。$$

这里 $1\leqslant i\leqslant t$,且 $p_1\gg k$,则方程就成为

$$S(n^k)=S(p_1^{k\alpha_1})=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t},$$

因为 $S(p_1^{k\alpha_1})\leqslant k\alpha_1p_1$,就可得到

$$S(p_1^{k\alpha_1})=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t}\leqslant k\alpha_1p_1,$$

又因为用数学归纳法证明得到 $p_1^{\alpha_1}>\alpha_1p_1$,所以

$$kp_1^{\alpha_1}>k\alpha_1p_1,$$

收稿日期:2006-13-14
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10271093);陕西省自然科学基金资助项目(2002A11)
作者简介:刘燕妮(1977—),女,陕西富平人,西北大学硕士生,从事解析数论及其应用研究。

$$p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t} > kp_t^{\alpha_t} > k\alpha_1 p_1,$$

因此

$$S(p_1^{k\alpha_1}) = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t} = k\alpha_1 p_1。$$

要保证等式 $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t} = k\alpha_1 p_1$成立, $\alpha_1 = 1$,得到 $n = kp_1$就是方程的解。记 $p_1 = p$,当 p足够大时,方程 $n = S(n^k)$的解是 $n = 1$和 $n = kp$,最多有有限个解遗漏。经过以上讨论,可以推导出方程 $n = S(n^k)$解的个数的渐近公式为

$$U(x) = \sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}} 1 = \sum_{kp\leqslant x} 1 + O(k) = \sum_{p\leqslant \frac{x}{k}} 1 + O(k) = \pi\left(\frac{x}{k}\right) + O(k) = \frac{x}{k\ln x} + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)。$$

综合以上 3种情况,完成定理的证明。

参考文献:

[1] SMARANDACHE F. Only Problems, Not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] ZHANG Wenpeng, LI Junzhuang, LIU Duansen. Research on Smarandache Problems in Number Theory[M]. Phoenix: Hexis, 2004.

[3] MA Jinping. The Smarandache multiplicative function[J]. Scientia Magna, 2005, 1(1): 125-128.

[4] 陈国慧,刘华宁. 有限域中一个方程及其解数的计算公式[J]. 西北大学学报:自然科学版, 2004, 34(3): 252-254.

(编 辑 亢小玉)

An equation involving the Smarandache function

LIU Yan-ni

(Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710069, China)

Abstract: Aim To solve the properties of an equation involving the Smarandache function in conformity with the Romanian number theory expert F. Smarandache professor's requirement. Methods To utilize the elementary method and analytic method. Results Solve the properties of this equation and have obtained the asymptotic formula of the number that this equation solves. Conclusion Have developed F. Smarandache professor in Only Problems, Not Solution book (Xiquan Publishing House, 1993) Relevant research work which China involves.

Key words: Smarandache function; equation; asymptotic formula

·学术动态·

“中国高校科技期刊现状调查与分析”研究项目顺利结题

由西北大学编辑出版与传播科学研究所和本刊编辑部主持,联合中国人民解放军防化指挥工程学院学报编辑部、清华大学学报编辑部等单位共同承担,中国高等学校自然科学学报研究会科技期刊学基金竞标项目资助的“中国高校科技期刊现状调查与分析”研究项目顺利结题。2006年 11月 20日,在江西南昌举行的首届中国高校精品、优秀、特色科技期刊颁奖大会暨学术年会上,课题主持人姚远编审就此作了专题报告。另两项招标课题也做了专题报告。教育部科技司、新闻出版总署办公厅的有关领导以及 300余名来自全国各地的代表出席会议。会议主持人宣布 3项竞标课题顺利结题。

姚远编审主持的“中国高校科技期刊现状调查与分析”研究项目旨在摸清中国高校科技期刊的“家底”。课题运用统计方法、网络调查方法、问卷调查和文献分析等方法,对中国高校科技期刊的历史与现状作了全面调查与分析研究。结果表明:中国高校现主办有科技期刊 1 494种,科研机构主办有 1 399种,学会、协会、研究会主办有 1 339种;在中国科技论文统计源期刊中,高校学报占 1/5以上,全国重点大学或 211工程学报的基金论文一般在 70%以上,不少达到 80% ~90%以上,2003年进入国际六大检索系统的大学学报高于其他科技期刊 2倍以上;在中国已形成高等学校、中国科学院、中国科协三大科技期刊出版系统高等学校在综合性科技学术期刊、英文科技期刊方面占有明显优势;对 1 025种高校科技期刊的统计,1994年至 2005年,发表省部级以上基金资助论文 16 383篇,且逐年增长,1980年仅为 2篇,1992年增至 100篇,2005年已增至 2 767篇,其中国家攀登计划项目、国家自然科学基金项目、“973”项目、“863”项目以及七五、八五、九五、十五攻关项目达 6 767篇,占总数的 41.30%,省部级项目 9 617篇,占 58.70%。截止于 2003年,作为高校科技期刊主要作者队伍和读者队伍的全国在校研究生已达到 79万人,教师达到 72.5万人,高校科技人力(即从事科学研究和科技研发人员)已达到 75万人,是中国科学院系统科技人员总数(34 609人)的近 22倍,故形成了潜在的、旺盛的稿件供方市场和需方市场,表现出极强的生命力和稳定性。高校科技期刊构成了距离高校作者和读者最近的一种期刊类型,与高等教育构成水乳交融的势态,成为教学科研的重要支撑条件之一;在高等教育发展、民族自主知识创新、高校学科建设、师资队伍与研究生培养中做出了巨大贡献,突出地表现出强大的育人功能和知识创新园地的功能。

(陈镱文)