DOI :10. 15983/j. cnki. jsnu. 2007. 04. 002
第 35 卷 第 4 期 陕西师范大学学报(自然科学版) Vol.35 No.4
2007 年 12 月 Journal of Shaanxi Normal University (Natural Science Edition) Dec. 2007

文章编号:1672-4291(2007)04-0009-03

一类包含 Smarandache 对偶函数方程的求解

薛西锋
(西北大学 数学系, 陕西 西安 710069)

摘 要: 对任意正整数 n, 著名的 Smarandache 对偶函数 $S^*(n)$ 定义为使得 $m!\mid n$ 最大的正整数 m. 利用初等方法研究了一类包含 Smarandache 对偶函数方程 $\sum_{d\mid n} S^*(d)=n$ 的可解性, 并获得了该方程的所有正整数解, 其解为 1 和 12.

关键词: Smarandache 对偶函数; 方程; 正整数解
中图分类号: O156.4 文献标识码: A

Solutions of an equation involving the Smarandache dual function

XUE Xi-feng
(Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710069, Shaanxi, China)

Abstract: For any positive integer n, the famous Smarandache dual function $S^*(n)$ is defined as the greatest positive integer m such that $m!$ divides n. The main purpose of this paper is to study the solutions of the equation $\sum_{d\mid n} S^*(d)=n$ by using the elementary method and to obtain all its positive integer solutions which ane proved to be 1 and 12.

Key words: Smarandache dual function; equation; positive integer solution
MR subject classification: 11B83

对任意正整数 n, 著名的 Smarandache 对偶函数 $S^*(n)$ 定义为最大的正整数 m 使得 $m!\mid n$. 即就是:

$$S^*(n)=\max\{m: m!\mid n, m\in \mathbf{N}\}.$$

例如当 $S^*(3)=1$, $S^*(4)=2$, $S^*(5)=1$, $S^*(6)=3$, $S^*(7)=1$, $S^*(8)=2$, $S^*(9)=1$, $S^*(10)=2$, $S^*(11)=1$, $S^*(12)=3$, $S^*(13)=1$, $S^*(14)=2$, $S^*(15)=1$, $S^*(16)=2$, $\cdots$. 由 $S^*(n)$ 的定义容易推出当 n 为奇数时, $S^*(n)=1$, 当 n 为偶数时, $S^*(n)\geqslant 2$. 这个函数是由罗马尼亚著名数论专家 J. Sandor 在文献[1] 中首次提出的, 并研究了它的各种初等性质, 获得了一系列重要的结论. 同时 J. Sandor 在文献[2] 中提出了下面的猜想:

$$S^*((2k-1)!(2k+1)!)=q-1,$$

其中 k 是一个正整数, q 是跟随 $2k+1$ 的第一个素数.

Le Maohua 在文献[3] 中证明了这一猜想是正确的. Xue Shejiao 在文献[4] 中证明了当 $\mathrm{Re}(s)>1$ 时有恒等式:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^*(n)}{n^s}=\zeta(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^s}$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S^*(n)n^s}=\zeta(s)\left(1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)((n+1)!)^s}\right),$$

其中 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ 是 Riemann zeta-函数.

注意到 $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$, $\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s)=1$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=\mathrm{e}-1$, 由上式可以推出:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^*(n)}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}$$

收稿日期: 2007-04-16
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671155)
作者简介: 薛西锋, 男, 副教授, 博士, 主要从事解析数论研究.

及 $\lim\limits_{s\to 1}(s-1)\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{S^{*}(n)}{n^{s}}\right)=\mathrm{e}-1$,

这里 $\mathrm{e}=2.718\ 281\ 828\ 459\cdots$ 是一个常数.

此外,文献[6]中还利用初等方法获得了较强的渐近公式:

$$\sum_{n\leqslant x}S^{*}(n)=(\mathrm{e}-1)x+O\left(\frac{\ln^{2}x}{(\ln\ln x)^{2}}\right).$$

关于这一函数以及有关内容也可以参阅文献[5,6].

本文的主要目的是利用初等方法研究一类包含 F.Smarandache 对偶函数方程的可解性,并获得了该方程的所有正整数解. 具体地说我们考虑了如下的问题:是否存在正整数 n 满足方程

$$\sum_{d\mid n}S^{*}(d)=n. \tag{1}$$

显然几乎对所有 n 有 $\sum\limits_{d\mid n}S^{*}(d)\leqslant n$,那么到底有多少 n 满足(1)式?本文完全解决了这一问题.

定理 1 方程(1)有且仅有两个解 $n=1,12$.

证明 容易验证 $n=1$ 满足方程(1).现在假定 $n>1$ 且满足(1)式,分下面几种情况讨论:

(ⅰ) $n=2k+1$ 为奇数.

此时显然对任意 $d\mid n$ 有 $2!$ 不整除 n,所以 $S^{*}(d)=1$.于是当 $n>1$ 且满足(1)式时有

$$n=\sum_{d\mid n}S^{*}(d)=\sum_{d\mid n}1=d(n), \tag{2}$$

其中 $d(n)$ 表示 Dirichlet 除数函数.(2)式显然是不可能的,因为当 $n\geqslant 3$ 时有 $n>d(n)$,所以(1)式没有大于 1 的奇数解.

(ⅱ) $n=2\cdot m$,m 为奇数.

容易直接验证 $m=1,3,5$ 时 n 不满足(1)式. 于是可以假定 $m\geqslant 7$. 若 $3\nmid m$ 且满足(1)式时有

$$n=2m=\sum_{d\mid n}S^{*}(d)=\sum_{d\mid m}S^{*}(d)+\sum_{d\mid m}S^{*}(2d)=\sum_{d\mid m}1+\sum_{d\mid m}2=3d(m).$$

于是 $2m=3d(m)$,这一等式当 $m\geqslant 7$ 时不可能成立,因为此时容易验证 $2m>3d(m)$.

若 $3\mid m$ 且 $n=2m$ 满足(1)式,则

$$n=2m=6\frac{m}{3}=\sum_{d\mid n}S^{*}(d)=\sum_{d\mid m}S^{*}(d)+\sum_{d\mid m}S^{*}(2d)=\sum_{d\mid m}1+\sum_{d\mid m/3}S^{*}(6d)+\sum_{d\mid m/3}S^{*}(2d)\leqslant d(m)+\sum_{d\mid \frac{m}{3}}3+3d\left(\frac{m}{3}\right)=d(m)+6d\left(\frac{m}{3}\right).$$

于是

$$2m=\frac{m}{2}+\frac{9}{2}\cdot\frac{m}{3}\leqslant d(m)+6d\left(\frac{m}{3}\right).$$

此式当奇数 $m/3$ 大于3时显然不成立.而当 $m/3=3$,即 $n=18$ 时,可直接验证

$$\sum_{d\mid 18}S^{*}(d)=S^{*}(1)+S^{*}(2)+S^{*}(3)+S^{*}(6)+S^{*}(9)+S^{*}(18)=1+2+1+3+1+2=10.$$

显然不满足(1)式,所以 $n=2\cdot m$,m 为奇数时不可能满足(1)式.

(ⅲ) $n=2^{2}\cdot m$,m 为奇数.

容易直接验证 $m=1$ 时 $n=4$ 不满足(1)式.而当 $m=3$ 时 $n=12$ 满足(1)式.事实上这时有

$$\sum_{d\mid 12}S^{*}(d)=S^{*}(1)+S^{*}(2)+S^{*}(3)+S^{*}(4)+S^{*}(6)+S^{*}(12)=1+2+1+2+3+3=12.$$

因此 $n=12$ 满足(1)式.若 $m>3$,则当 $3\mid m$ 时有 $m\geqslant 9$. 此时,若 n 满足(1),则

$$n=2^{2}m=\sum_{d\mid n}S^{*}(d)=\sum_{d\mid m}S^{*}(d)+\sum_{d\mid m}S^{*}(2d)+\sum_{d\mid m}S^{*}(4d)=\sum_{d\mid m}1+\sum_{d\mid m/3}S^{*}(6d)+\sum_{d\mid m/3}S^{*}(2d)+\sum_{d\mid m/3}S^{*}(12d)+\sum_{d\mid m/3}S^{*}(6d)\leqslant d(m)+4\sum_{d\mid \frac{m}{3}}3=d(m)+12d(m/3).$$

所以

$$4m=m+9\frac{m}{3}\leqslant d(m)+12d(m/3).$$

根据除数函数的性质容易验证此式当奇数 $m/3>3$ 时不可能成立.而当 $m/3=3$,即 $n=36$ 时,可以直接检验

$$\sum_{d\mid 36}S^{*}(d)=S^{*}(1)+S^{*}(2)+S^{*}(3)+S^{*}(4)+S^{*}(6)+S^{*}(12)+S^{*}(9)+S^{*}(18)+S^{*}(36)=1+2+1+2+3+3+1+3+3=19\neq 36.$$

当 $n=2^{2}\cdot m$,m 为奇数且 $3\nmid m$ 时,若 n 满足(1)式,则有

$$n=4m=\sum_{d\mid n}S^{*}(d)=\sum_{d\mid m}S^{*}(d)+\sum_{d\mid m}S^{*}(2d)+\sum_{d\mid m}S^{*}(4d)=\sum_{d\mid m}1+\sum_{d\mid m}2+\sum_{d\mid m}2=5d(m).$$

显然 $4m=5d(m)$ 是不可能的.所以,当 $n=2^{2}\cdot$

m，m 为奇数时只有 $n=12$ 满足(1)式.

(ⅳ) $n=2^{\alpha}\circ m$，m 为奇数，$\alpha\geqslant 3$.

此时若 $m=1$，则 $n=2^{\alpha}$，所以

$$n=2^{\alpha}=\sum_{d\mid 2^{\alpha}}S^{*}(d)=1+\sum_{d\mid 2^{\alpha-1}}S^{*}(2d)=1+2d(2^{\alpha-1})=2\alpha+1\neq 2^{\alpha}.$$

当 $m=3$ 时有

$$n=2^{\alpha}3=\sum_{d\mid 2^{\alpha}3}S^{*}(d)=\sum_{d\mid 2^{\alpha}}S^{*}(d)+\sum_{d\mid 2^{\alpha}}S^{*}(3d)=2\alpha+1+1+3\sum_{d\mid 2^{\alpha}}1-3=1+2d(2^{\alpha-1})=3\alpha+2,$$

显然 $2^{\alpha}3\neq 3\alpha+2$. 因此 $n=2^{\alpha}3$ 时不可能满足(1)式.现在不妨设 $S^{*}(n)=S^{*}(2^{\alpha}m)=u$，奇数 $m>3$. 若 $u=2$，则当 n 满足(1)式时有

$$n=2^{\alpha}m=\sum_{d\mid n}S^{*}(d)=\sum_{d\mid m}S^{*}(d)+\sum_{d\mid \frac{n}{2}}S^{*}(2d)=\sum_{d\mid m}1+\sum_{d\mid \frac{n}{2}}2=d(m)+d\left(\frac{n}{2}\right),$$

所以 $2^{\alpha}m=d(m)+d(2^{\alpha-1}m)$. 显然不可能，因为当 $m>3$ 时 $2^{\alpha}m>d(m)+d(2^{\alpha-1}m)$.

若 $u=3$，则 $3\mid m$. 于是当 n 满足(1)式时有

$$n=2^{\alpha}m=\sum_{d\mid n}S^{*}(d)=\sum_{d\mid m}S^{*}(d)+\sum_{d\mid \frac{n}{2}}S^{*}(2d)\leqslant\sum_{d\mid m}1+\sum_{d\mid \frac{n}{6}}3+\sum_{d\mid \frac{n}{6}}3=d(m)+6d\left(\frac{n}{6}\right).$$

因此 $2^{\alpha}m\leqslant d(m)+6d\left(\frac{n}{6}\right)$. 显然不可能，因为当 $m\geqslant 3$ 时 $n=2^{\alpha}m>d(m)+6d\left(\frac{n}{6}\right)$.

若 $u\geqslant 4$，则 $3\mid m$. 由于 $u!\mid n=2^{\alpha}m$，所以

$$\alpha\geqslant\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{u}{2^{i}}\right].$$

于是当 $u=4$ 且 n 满足(1)式时有

$$n=2^{\alpha}m=\sum_{d\mid n}S^{*}(d)=\sum_{i=0}^{\alpha}\sum_{d\mid m}S^{*}(2^{i}d)\leqslant\sum_{d\mid m}1+\sum_{d\mid m}3+(\alpha-1)\sum_{d\mid m}4\leqslant 4d(m)+4(\alpha-1)d(m).$$

所以 $2^{\alpha}m\leqslant 4\alpha d(m)$. 显然当 $\alpha\geqslant 3$，$m>3$ 时这一不等式是不可能的.

当 $u\geqslant 5$ 时，一定有 $3\mid m$ 及 $5\mid m$，即就是奇数 $m\geqslant 15$，此时容易推出

$$15d(m)\leqslant 4m. \tag{4}$$

因而，当 n 满足(1)式时有

$$n=2^{\alpha}m=\sum_{d\mid n}S^{*}(d)=\sum_{i=0}^{\alpha}\sum_{d\mid m}S^{*}(2^{i}d)\leqslant\sum_{d\mid m}1+\sum_{d\mid m}3+(\alpha-1)\sum_{d\mid m}u\leqslant 4d(m)+u(\alpha-1)d(m)\leqslant(u\alpha-1)d(m).$$

因此

$$2^{\alpha}m\leqslant(u\alpha-1)d(m).$$

由(3)式知

$$\alpha\geqslant\frac{u-1}{2}+\frac{u-1}{4}=\frac{3u-3}{4}.$$

于是结合上式及(4)式可得

$$2^{\alpha}15\leqslant 4(u\alpha-1)\leqslant 4\left[\alpha\left(\frac{4\alpha}{3}+1\right)-1\right].$$

显然当 $\alpha\geqslant 3$ 时这一不等式是不可能的.

结合以上四种情况即完成定理的证明.

参考文献：

[1] Sandor J. On certain generalizations of the Smarandache function[J]. Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, 1999, 5(2): 45-51.

[2] Sandor J. On certain generalizations of the Smarandache function[J]. Smarandache Notions Journal, 2000, 11: 202-212.

[3] Maohua Le. A conjecture concerning the Smarandache dual functions[J]. Smarandache Notions Journal, 2004, 14: 153-155.

[4] Shejiao Xue. On the Smarandache dual function[J]. Scientia Magna, 2007, 3(1): 29-32.

[5] David Gorski. The pseudo smarandache functions[J]. Smarandache Notions Journal, 2000, 11: 104-108.

[6] Sandor J. On additive analogues of certain arithmetic function[J]. Smarandache Notions Journal, 2004, 14: 128-132.

〔责任编辑　张惠民〕