与 Smarandache 函数有关的两个方程

Two Equations Related to the Smarandache Function

关文吉 GUAN Wen-ji
(渭南师范学院数学与信息科学学院,渭南 714000)
(School of Mathematics and Information Science,Weinan Normal University,Weinan 714000,China)

摘要：对于任意自然数 n,Smarandache 函数 S(n)指最小的正整数 m，能够满足 $n\mid m!$。对于任意给定的正整数 n，著名的伪 Smarandache 函数 Z(n)定义为最小的正整数 m,使得 $n\mid 1+2+\cdots m=\frac{m(m+1)}{2}$。文章用初等方法研究了方程 S(n)+Z(n)=n 和 S(n)=P(n),并给出了它们的全部解。

Abstract: For any natural number n, Smarandache function S(n) means the smallest positive integer m can satisfy $n\mid m!$. For any given positive integer n,the famous pseudo Smarandache function Z(n) is defined as the smallest positive integer m to make $n\mid 1+2+\cdots m=\frac{m(m+1)}{2}$. This paper uses elementary method to study the equation S(n)+Z(n)=n and S(n)=P(n), and gives their all solutions.

关键词:Smarandache 函数;伪 Smarandache 函数;整数解

Key words: Smarandache function;pseudo Smarandache function;integral solution

中图分类号:O156.4 **文献标识码**:A **文章编号**:1006-4311(2015)31-0247-02

DOI:10.14018/j.cnki.cn13-1085/n.2015.31.098

1 引言及相关定理

对任意自然数 n,设 S(n)表示 Smarandache 函数,若存在最小的正整数 m,能使 $n\mid m!$ 则定义为 m,即 $S(n)=\min\{m:n\mid m!,m\in N\}$,如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 为 n 的标准因子分解式,则由定义容易推出 $S(n)=\max_{1\le i\le k}\{S(p_i^{\alpha_i})\}$,由此也不难算出 S(n)的前几个值为:

S(1)=1,S(2)=2,S(3)=3,S(4)=4,S(5)=5,S(6)=3,S(7)=7,S(8)=4,S(9)=6,S(10)=5,S(11)=11,S(12)=4,S(13)=13,S(14)=7,S(15)=5,S(16)=6,…,对于任意给定的自然数 n,伪 Smarandache 函数 Z(n)定义为最小的自然数 m,使得 $n\mid 1+2+\cdots m=\frac{m(m+1)}{2}$,即

$$Z(n)=\min\left\{m:m\in N,n\mid \frac{m(m+1)}{2}\right\}$$

由此公式可知 Z(1)=1,Z(2)=3,Z(3)=2,Z(4)=7,Z(5)=4,Z(6)=3,Z(7)=6,Z(8)=15,Z(9)=8,Z(10)=4,Z(11)=10,Z(12)=8,Z(13)=12,Z(14)=7,Z(15)=5,Z(16)=31,…作者 Kashihara 在文献[1]中提出的 Kashihara 和 Ibstedt 研究了此函数的性质并获得相关的结果。

该篇文章运用了初等方法研究了方程 S(n)+Z(n)=n 与 S(n)=P(n)(P(n)表示 n 的最大素因子),并且得到了这两个方程的全部正整数解,即以下定理:

定理 1:方程 S(n)+Z(n)=n 仅有的两个特殊正整数解是 n=6,12,其它自然数 n 是方程的解当且仅当 $n=p\cdot u$ 或者 $n=p\cdot 2^{\alpha}\cdot u$,其中素数 $p\ge 7$,$2^{\alpha}\mid p-1$.u 是 $\frac{p-1}{2^{\alpha}}$ 的任意一个大于 1 的奇数因子。

定理 2: 如果 P(n)表示 n 的最大素因子,即 $P(n)=\max\{p_1,p_2,\cdots,p_k\}$,并且当 $P(n)>\sqrt{n}$ 时有 S(n)=P(n)。

2 定理的证明

这一部分,我们将会用初等方法直接证明以上两个定理,首先要引入以下两个引理:

引理[2] 若 n 是偶完全数的充分必要条件是 $n=2^{p-1}(2^p-1)$,其中 p 和 2^p-1 都是素数。

引理[3] 若 p 为一素数,则 $S(p^k)\le kp$;若 $k<p$,则 $S(p^k)=kp$,其中 k 为任意给定的正整数。

设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 为 n 的标准因子分解式,则 $S(n)=\max_{1\le i\le k}\{S(p_i^{\alpha_i})\}=S(p^{\alpha})$,其中 p 为素数。

容易验证 Z(1)+S(1)=2≠1,Z(2)+S(2)=5≠2,Z(3)+S(3)=5≠3,Z(4)+S(4)=11≠4,Z(5)+S(5)=9≠5,Z(6)+S(6)=6,所以 n=1,2,3,4,5 都不是方程 S(n)+Z(n)=n 的解,n=6 是方程 S(n)+Z(n)=n 的解,所以方程的其它解一定满足 $n\ge 7$,若 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 为 n 的标准因子分解式,则 $S(n)=\max_{1\le i\le k}\{S(p_i^{\alpha_i})\}=S(p^{\alpha})$,注意到 $p\mid n$ 及 $S(n)=u\cdot p$,故可设 $n=p^{\alpha}\cdot n_1$,当 n 是方程 S(n)+X(n)=n 的解时有

$$Z(n)+u\cdot p=p^{\alpha}\cdot n_1 \qquad (1)$$

首先证明(1)中 $\alpha=1$,否则假定 $\alpha\ge 2$,由(1)知 $p\mid Z(n)=m$

由 Z(n)=m 的定义知 $n=p^{\alpha}\cdot n_1$ 整除 $\frac{m(m+1)}{2}$,而 $(m,m+1)=1$,故 $p^{\alpha}\mid m$,从而由(1)推出 $p^{\alpha}\mid S(n)=u\cdot p$,即 $p^{\alpha-1}\mid u$,从而 $p^{\alpha-1}\le u$,但另一方面由于 $S(n)=S(p^{\alpha})=u\cdot p$,由 S(n)的

基金项目:2014 陕西省扶持学科数学学科基金资助项目(14SXZD017);渭南师范学院军民融合项目(15JMR15)。

作者简介:关文吉(1978-),女,陕西大荔人,渭南师范学院数学与信息科学学院副教授,理学硕士。

http://www.cnki.net/kcms/detail/13.1085.N.20151013.1203.002.html

土地流转背景下陕西农村养老保障问题的探析

Exploration on the Shaanxi Rural Old-age Security under Land Transfer Background

赵艳 ZHAO Yan；邢波 XING Bo

（西安培华学院通识教育中心，西安 710100）

（West Peihua University General Education Center，Xi′an 710100，China）

摘要：陕西省的土地流转有力地调整了农业结构，优化了城乡资源配置，但农村的养老体系也在经受着前所未遇的考验。本文从当前陕西省农村养老保障的现状出发，分析了土地流转背景下陕西农民养老保障难的原因，重点探讨了土地流转背景下如何解决农村养老保障问题，提出了笔者的几点政策建议。

Abstract: Land transfer of Shaanxi province has effectively adjusted the agricultural structure and optimized the allocation of resources in urban and rural areas, but the old-age security system in rural areas are also experiencing unprecedented test. In this paper, from the current status of rural old-age security in Shaanxi province, it analyzes the causes for the difficult rural old-age security under land transfer background, discusses the measures for solving the problems of rural old-age security, and puts forward some policy recommendations.

关键词：土地流转；养老资金；农村养老保障

Key words: land transfer；pension funds；rural old-age security

中图分类号：F323.89　　**文献标识码：**A　　**文章编号：**1006-4311（2015）31-0248-02

DOI:10.14018/j.cnki.cn13-1085/n.20151013.001

0 引言

土地流转是我国农业发展的必由之路，党的十七届三中全会通过的《中共中央关于推进农村改革发展若干重大问题的决定》进一步对农村土地流转政策作出明确规定，同时《决定》还指出“加快健全农村社会保障体系”。政策出台后陕西省的土地流转有力地调整了农业结构，优化了城乡资源配置，增加了农民的收入；但与此同时，农村的养老体系也在经受着前所未遇的考验。作为西部农村人口覆盖面较广的陕西省，总人口3735万，农村人口2028万，占近60%，农民纯收入源于土地的比重正日益下降，而适合农村的新的养老保障体系还未形成因此，如何妥善地协调土

基金项目：陕西省社会科学基金一般项目，项目名称：大安全观视域下的安全保障型社会构建研究——以文化信息安全为例，编号：2014A18；陕西省教育厅2015年科学研究项目，名称：土地流转背景下陕西省农村养老保障问题研究，编号：15JK2095。

作者简介：赵艳（1980-），女，陕西岐山人，硕士，教师，研究方向为社会主义理论与建设。

性质知 $u\le\alpha$，所以 $p^{\alpha-1}\le u\le\alpha$，此式对于奇素数 p 显然不成立，如果 p=2，则 $\alpha\ge3$ 当时，$p^{\alpha-1}\le u\le\alpha$ 仍旧不成立，必然只有结论：$u=\alpha=2$，联系 $n\ge5$ 和 $S(n)=4$，得到结论：n=12，但 n=12 是方程 $S(n)+Z(n)=n$ 的一个解，故若其它正整数 n 也满足方程 $S(n)+Z(n)=n$，那么（1）式中一定有 $S(n)=p$，$\alpha=u=1$，此时，令 $Z(n)=m=p\cdot v$，则（1）式成为 $v+1=n_1$ 即 $n=p\cdot(v+1)$，$X(n)=p\cdot v$，再由 Z(n) 的定义知 $n=p\cdot(v+1)$ 整除 $\frac{pv\cdot(pv+1)}{2}$ 即 $(v+1)$ 整除 $\frac{v\cdot(pv+1)}{2}$，由于 $(v,v+1)=1$，所以当 v 为偶数时由上式推出 $v+1\mid pv+p-p+1$ 即 $v+1\mid p-1$ 或者 $v+1\left|\frac{p-1}{2}\right.$。显然对 $\frac{p-1}{2}$ 的任意大于 1 的奇数因子 r，$n=p\cdot r$ 是方程 $S(n)+Z(n)=n$ 的解，因为此时有 $Z(p\cdot r)=p\cdot(r-1)$。

当 v 为奇数时，由 $(v+1)$ 整除 $\frac{v\cdot(pv+1)}{2}$ 得到

$$v+1\left|\frac{pv+1}{2}=\frac{(p-1)(v+1)+v-p+2}{2}\right.$$

由此知 $p-1=(2k+1)(v+1)$，则可以令 $p-1=2^{\beta}h$，其中 h 是奇数，那么 $\frac{v+1}{2^{\beta}}$ 是小于 h 的奇数因子，可以检验对任意奇数 $r\mid h$ 且 $r<h$，$n=p2^{\beta}r$ 为方程 $S(n)+Z(n)=n$ 的解，因为此时有 $Z(p2^{\beta}r)=p(2^{\beta}r-1)$。事实上，由于 $r\mid h$，容易推出 $p2^{\beta}r$ 整除 $\frac{p(2^{\beta}r-1)[p(2^{\beta}r-1)+1]}{2}$，其次当 $m<p(2^{\beta}r-1)$ 时，不可能有 $p2^{\beta}r$ 整除 $\frac{m(m+1)}{2}$，于是由 Z(n) 的定义知 $Z(p2^{\beta}r)=p(2^{\beta}r-1)$。

定理 1 证毕

下面用初等方法来证明定理 2。

证明 根据 P(n) 的定义及条件 $P(n)>\sqrt{n}$，知 P(n) 为素数，设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}P(n)$ 可得 $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}<\sqrt{n}<p(n)$

所以 $p_i^{\alpha_i}\mid p(n)!$，$i=1,2,\cdots r$

故 $n\mid p(n)!$，但是 p(n) 不整除 $(p(n)-1)!$，即

$p(n)!=\min\{m:n\mid m!,m\in N\}$

所以，$S(n)=P(n)$，定理证毕。

参考文献：

[1]Kashihara, Kenichiro. Comments and topics on Smarandache notions and problems[M]. USA: Erhus University Press, 1996.

[2]华罗庚.数论导引[M].北京：科学出版社，1979.

[3]Mark Farris, Patrick Mitshell. Bounding the Smarandache function[J]. Smarandache Notions Journal, 2002, Vol. 13(1):37-42.

[4]Ma J.P.,An equation involving the Smarandache function [J]. Scientia Magna,2005(2).

[5]F.Mark,M.Patrick,Bounding the Smarandache function [J]. Smarandache Journal,2002 (13).

[6]F.Smarandache, Only Problems, Not Solutions [M], Chicago, Xiquan Publishing House, 1993.