[文章编号]1673 −2944(2011) 04 −0074 −03

两个关于 k 阶 Smarandache ceil 函数的方程

赵杏花， 郭金保， 穆秀梅， 何　桃
(延安大学 数学与计算机科学学院， 陕西 延安 716000)

[摘　要]　利用初等方法研究了包含 k 阶 Smarandache ceil 函数 $S_k(n)$ 、伪 Smarandache 无平方因子函数 $Z_w(n)$ 以及伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 的两个方程的可解性，给出了它们所有解的具体形式。

[关　键　词]　k 阶 Smarandache ceil 函数;　伪 Smarandache 无平方因子函数;　伪 Smarandache 函数

[中图分类号]　O156. 4　　[文献标识码]　A

设 $k\geqslant 2$ 为给定的整数。对任意正整数 n，k 阶 Smarandache ceil 函数 $S_k(n)$ 定义为:

$$S_k(n) = \min\{x: x \in N^*, n \mid x^k\},$$

其中 N^* 为正整数。例如 $k=2$ 时，$S_2(n)$ 的前几个值为:

$$S_2(1) = 1, S_2(2) = 2, S_2(3) = 3, S_2(4) = 2, S_2(5) = 5, S_2(6) = 6, S_2(7) = 7,$$
$$S_2(8) = 4, S_2(9) = 3, S_2(10) = 10, S_2(11) = 11, S_2(12) = 6, \cdots。$$

伪 Smarandache 无平方因子函数 $Z_w(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n \mid m^n$，即

$$Z_w(n) = \min\{m: m \in N^*, n \mid m^n\}。$$

函数 $S_k(n)$ 和 $Z_w(n)$ 是 Smarandache[1] 教授首先引入，关于它们有不少学者进行了研究，得到了一些有趣的结论[2-7]。其中部分结果为: 当 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ 为 n 的标准因子分解式时，

$$S_k(n) = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_r^{\beta_r}, \quad \beta_i = \left[\frac{\alpha_i + k - 1}{k}\right], \quad i = 1, 2, \cdots, r,$$

其中: $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数; $Z_w(n) = p_1 p_2 \cdots p_r$。

伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 是 David Gorski[8] 引进的，$Z(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n \left| \frac{m(m+1)}{2} \right.$，即

$$Z(n) = \min\left\{m: n \left| \frac{m(m+1)}{2}, m \in N^* \right.\right\}。$$

同时他还研究了 $Z(n)$ 的基本性质，其中部分结果为:

(1)　p 为奇素数时，对任意的正整数 α 有 $Z(p^\alpha) = p^\alpha - 1$;

(2)　对任意的正整数 k 有 $Z(2^k) = 2^{k+1} - 1$。

本文在《初等数论》[9] 的基础上研究了方程 $S_k(n) + Z_w(n) = 2n$ 和 $Z(n) = S_2(n)$ 的可解性，并给出了它们所有解的具体形式。

定理 1　方程 $S_k(n) + Z_w(n) = 2n$ 有且仅有 $n = 1$，$p_1 p_2 \cdots p_r$ 两种形式的正整数解，其中 $p_i (i = 1, 2, \cdots, r)$ 为不同的素数。

收稿日期: 2011-06-22
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10901128)
作者简介: 赵杏花(1986—) ，女，陕西省泾阳县人，延安大学研究生，主要研究方向为数论; 郭金保(1953—) ，男，陕西省府谷县人，延安大学教授，主要研究方向为数论。

证明　当 $n=1$ 时，$S_k(n)+Z_w(n)=2$ 成立。

设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}>1$ 为 n 的标准因子分解式。

当 $\alpha_i=1(i=1,2,\cdots,r)$ 时

$$S_k(n)=p_1p_2\cdots p_r,\quad Z_w(n)=p_1p_2\cdots p_r,$$

所以 $S_k(n)+Z_w(n)=2n$ 成立。

当 α_i 不全为 1 时 $Z_w(n)=p_1p_2\cdots p_r$，$S_k(n)=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_r^{\beta_r}$，其中

$$1\leqslant\beta_i=\left[\frac{\alpha_i+k-1}{k}\right]\leqslant\alpha_i,\quad i=1,2,\cdots,r,$$

所以

$$S_k(n)+Z_w(n)=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_r^{\beta_r}+p_1p_2\cdots p_r<2p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r},$$

所以此时方程无正整数解。于是完成了定理 1 的证明。

定理 2　方程 $Z(n)=S_2(n)$ 有且仅有一个正整数解 $n=1$。

证明　当 $n=1$ 时，$Z(n)=S_2(n)=1$ 成立。

当 $n=p^\alpha$，p 为奇素数时，$Z(n)=p^\alpha-1$ 为偶数，但 $S_2(n)=p^{\left[\frac{\alpha+2-1}{2}\right]}$ 为奇数，所以此时方程无正整数解。

当 $n=2^\alpha$，α 为任意的正整数时，$Z(n)=2^{\alpha+1}-1$ 为奇数，但 $S_2(n)=2^{\left[\frac{\alpha+2-1}{2}\right]}$ 为偶数，所以此时方程无正整数解。

若 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}>1$ 为 n 的标准因子分解式。如果 $Z(n)=S_2(n)$ 有正整数解，不妨假设 $Z(n)=S_2(n)=m$，所以

$$m=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_r^{\beta_r},\quad \beta_i=\left[\frac{\alpha_i+2-1}{2}\right],\quad i=1,2,\cdots,r。$$

由 $Z(n)$ 的定义可知

$$p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}\left|\frac{p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_r^{\beta_r}(p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_r^{\beta_r}+1)}{2}\right.。$$

即

$$p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}\mid p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_r^{\beta_r}(p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_r^{\beta_r}+1),$$

当 $\alpha_i=1$ 时 $\beta_i=1$，则 $S_2(n)=n$，但 $Z(n)<n$，所以此时方程无正整数解。

当 α_i 均为偶数时

$$p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}\mid p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}+p_1^{\alpha_1/2}p_2^{\alpha_2/2}\cdots p_r^{\alpha_r/2},$$

这与

$$p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}\nmid p_1^{\alpha_1/2}p_2^{\alpha_2/2}\cdots p_r^{\alpha_r/2}$$

矛盾，所以此时方程无正整数解。

当 α_i 不全为 1 且均为奇数时

$$p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}\mid p_1^{\alpha_1+1}p_2^{\alpha_2+1}\cdots p_r^{\alpha_r+1}+p_1^{(\alpha_1+1)/2}p_2^{(\alpha_2+1)/2}\cdots p_r^{(\alpha_r+1)/2},$$

这与

$$p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}\nmid p_1^{(\alpha_1+1)/2}p_2^{(\alpha_2+1)/2}\cdots p_r^{(\alpha_r+1)/2}$$

矛盾，所以此时方程无正整数解。

当 α_i 既有奇数又有偶数时，不妨设前 i 项为奇数项，后 $r-i$ 项为偶数项，则有

$$p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}\mid p_1^{\alpha_1+1}\cdots p_r^{\alpha_r+1}p_{i+1}^{\alpha_{i+1}}\cdots p_r^{\alpha_r}+p_1^{(\alpha_1+1)/2}\cdots p_i^{(\alpha_i+1)/2}p_{i+1}^{(\alpha_{i+1})/2}\cdots p_r^{\alpha_r/2},$$

这与

$$p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}\nmid p_1^{(\alpha_1+1)/2}\cdots p_i^{(\alpha_i+1)/2}p_{i+1}^{(\alpha_{i+1})/2}\cdots p_r^{\alpha_r/2}$$

矛盾，所以此时方程无正整数解。于是完成了定理 2 的证明。

[参 考 文 献]

[1] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] 沈虹. 一个新的数论函数及其它的值分布[J]. 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(2): 235-238.

[3] 朱敏慧. 一个包含 Euler 函数及对 k 阶 Smarandache ceil 函数的方程及其整数解[J]. 纯粹数学与应用数学, 2009, 25(2): 414-416.

[4] Le Maohua. On the pseudo-Smarandache squarefree function[J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13(1/2/3): 229-236.

[5] 樊旭辉, 周航. Pseudo-Smarandache-Squarefree 函数及其它的均值[J]. 昆明理工大学学报: 自然科学版, 2008, 33(6): 117-119.

[6] 冯强, 郭金保. 关于 Smarandache ceil 函数及其对偶函数的均值[J]. 西南民族大学学报: 自然科学版, 2007, 33(4): 713-717.

[7] 张沛. 一个包含伪 Smarandache 无平方因子函数的方程[J]. 郑州大学学报: 理学版, 2008, 40(2): 36-38.

[8] David Gorski. The Pseudo Smarandache Function[J]. Smarandache Notions Journal, 2002(13): 140-149.

[9] 张文鹏. 初等数论[M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2007.

[责任编辑: 谢 平]

Two equations concerning the Smarandache ceil function of k order

ZHAO Xing-hua, GUO Jin-bao, MU Xiu-mei, HE Tao

(School of Mathematics and Computer Science, Yan´an University, Yan´an 716000, China)

Abstract: Two equations concerning the Smarandache ceil function of k order $S_k(n)$, the pseudo Smarandache squarefree function $Z_w(n)$ and the pseudo Smarandache function $Z(n)$ were discussed by using the elementary method and the concrete forms of their solutions were given.

Key words: Smarandache ceil function of k order; pseudo Smarandache squarefree function; pseudo Smarandache function

---

(上接第73页)

[参 考 文 献]

[1] 华罗庚, 王元. 数论在近似分析中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 1978.

[2] 李文清. 多项式根的分布[J]. 中国科学, 1951(2): 21-23.

[3] 北京大学数学力学系几何与代数教研室. 高等代数[M]. 北京: 人民教育出版社, 1978: 1-43, 157-335.

[4] 沈景清, 曹德. 一元 n 次多项式根的圆环覆盖定理[J]. 吉林师范学院学报, 1999, 20(3): 33-35.

[责任编辑: 李少凌]

Estimation and localization of the polynomial root

CAO Hai-song, WU Jun-liang

(School of mathematics and statistics of Chongqing University, Chongqing 401331, China)

Abstract: The estimation and the localization of the polynomial root were associated with the estimation and localization of the matrix eigenvalues in this paper. The estimation and the localization of polynomial characteristics root by some special kinds of proposition were discussed, and then the estimation of the general polynomial features root was obtained.

Key words: polynomial; root; friend matrix; estimation and localization