DOI:10.16468/j.cnki.issn1004-0366.2011.04.036

关于 Smarandache 下部及上部阶乘数列

黄 炜
(宝鸡职业技术学院 基础部,陕西 宝鸡 721013)

摘 要: 对任意正整数 n,设 $a(n)$ 表示不小于 n 的最小 m 阶乘部分. $b(n)$ 表示不超过 n 的最大 m 阶乘部分,研究了上部阶乘 $a(n)$ 及下部阶乘 $b(n)$ 部分数列,采用初等及解析的方法,给出了 2 个有趣的渐近公式,在所得的定理的基础上,研究了数列 $\{S_n(n)/I_n(n)\}$, $\{K_n(n)/L_n(n)\}$, $\{S_n(n)-I_n(n)\}$, $\{K_n(n)-L_n(n)\}$ 的敛散性.

关键词: 下部及上部阶乘部分数列;均值;渐近公式;敛散性
中图分类号: O156.4 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-0366(2011)04-0005-04

On the Smarandache Inferior and Superior Factorial Series

HUANG Wei
(*Department of Sciences, Baoji Vocational and Technical College, Baoji 721013, China*)

Abstract: Let n be a positive integer, $a(n)$ be the smallest m factorial number greater than or equal to n; and $b(n)$ be the largest m factorial number less than or equal to n. The smallest inferior factorial part $a(n)$ and the largest Superior factorial part $b(n)$ of integer n are studied by using the elementary and analytic methods. Two interesting asymptotic formulas for them are given on the basis of theorem1 obtained. Hence, $\{S_n(n)/I_n(n)\}$, $\{K_n(n)/L_n(n)\}$, $\{S_n(n)-I_n(n)\}$, $\{K_n(n)-L_n(n)\}$. Its convergence and divergence are also studied.

Key words: inferior and superior factorial series; mean value; asymptotic formula; convergence and divergence

1993 年数论专家 Smarandache 提出了正整数 n 的 m 阶乘部分数列[1],即设对正整数 n,n 的 m 阶乘部分数列定义如下:

$$a(n)=\min\{m!\mid m!\geqslant n, m\in N^{+}\}, b(n)=\max\{m!\mid m!\leqslant n, m\in N^{+}\},$$

其中 $n\in N^{+}$,称 $a(n)$ 表示不小于 n 的最小 m 阶乘部分,亦称为上部 m 阶乘部分数列,称 $b(n)$ 表示不超过 n 的最大 m 阶乘部分,亦称为下部 m 阶乘部分数列,例如

$$a(4)=3!, a(5)=3!, a(6)=3!, a(7)=4!, \cdots, a(24)=4!, a(25)=5!, \cdots$$

$$b(1)=1!, b(2)=2!, b(3)=2!, b(4)=2!, b(5)=2!, b(6)=3!, \cdots, b(23)=3!, b(24)=4!, \cdots$$

令

$$S_n(n)=[\log(a(1))+\log(a(2))+\log(a(3))+\cdots+\log(a(n))]/n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(a(n)),$$

$$I_n(n)=[\log(b(1))+\log(b(2))+\log(b(3))+\cdots+\log(b(n))]/n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(b(n)),$$

收稿日期: 2011-04-13
基金项目: 国家自然科学基金项目(10871123);陕西省自然科学基金项目(SJ08A28)

$$K_n(n)=\sqrt[n]{\log(a(1))+\log(a(2))+\log(a(3))+\cdots+\log(a(n))}=(\sum_{i=1}^{n}\log(a(n)))^{\frac{1}{n}},$$

$$L_n(n)=\sqrt[n]{\log(b(1))+\log(b(2))+\log(b(3))+\cdots+\log(b(n))}=(\sum_{i=1}^{n}\log(b(n)))^{\frac{1}{n}}.$$

关于阶乘部分数列，Smarandache 教授要求研究其性质，文献[2-6]做了相关研究，但关于 $\log(a(n))$ 及 $\log(b(n))$ 均值问题，至今还没有看到有关文献.我们利用初等方法研究了这2个数列的均值性质，并给出了2个有趣的渐近公式，同时研究了数列 $\{S_n(n)/I_n(n)\}$，$\{K_n(n)/L_n(n)\}$，$\{S_n(n)-I_n(n)\}$，$\{K_n(n)-L_n(n)\}$ 的敛散性，即证明了下面的定理[7,8]：

定理 对任意实数 $x>1$，我们有渐近公式：

$$\sum_{n\leqslant x}\log(a(n))=x\log x+O\Big(\frac{x\log x\cdot\log\log\log x}{\log\log x}\Big),$$

$$\sum_{n\leqslant x}\log(b(n))=x\log x+O\Big(\frac{x\log x\cdot\log\log\log x}{\log\log x}\Big).$$

由以上定理立刻得到下面的推论：

推论 1 对任意正整数 n，有渐近式及极限式

$$\frac{S_n(n)}{I_n(n)}=1+O\Big(\frac{\log n\cdot\log\log\log n}{\log\log n}\Big)^{-1},\lim_{n\to\infty}\frac{S_n(n)}{I_n(n)}=1.$$

推论 2 对任意正整数 n，有渐近式及极限式

$$\frac{K_n(n)}{L_n(n)}=1+O\Big(\frac{\log n\cdot\log\log\log n}{\log\log n}\Big)^{-\frac{1}{n}},\lim_{n\to\infty}\frac{K_n(n)}{L_n(n)}=1,\lim_{n\to\infty}(K_n(n)-L_n(n))=0.$$

推论 3 对任意正整数 n，有渐近式及极限式

$$S_n(n)-I_n(n)=\frac{1}{n}(m^2(m-1)!\log\log n+O(\log\log m)),\lim_{n\to\infty}S_n(n)-I_n(n)=0.$$

1 引理

引理 1 对任意实数 $x>1$，有

$$\log m!=m\log m-m+O(\log m). \quad (1)$$

证明 对于任意正数 $x\geqslant 1$，存在唯一的正整数 m，满足 $m!<x\leqslant(m+1)!$

两边取对数：$\sum_{i=1}^{m}\log i<\log x\leqslant\sum_{i=1}^{m+1}\log i.$

由 Euler 求和公式，有

$$\sum_{n\leqslant m}\log i=\Big(m+\frac{1}{2}\Big)\log(m+1)-m-1+C+O\Big(\frac{1}{m}\Big)=m\log m-m+O(\log m),$$

$$\sum_{n\leqslant m+1}\log i=\Big(m+1+\frac{1}{2}\Big)\log(m+2)-m-2+C+O\Big(\frac{1}{m}\Big)=m\log m-m+O(\log m),$$

于是

$$\log m!=\log(m+1)!+O(1)=\log n+O(1)=m\log m-m+O(\log m).$$

取 $x=n$，由逼挟定理得

$$\log n=m\log m-m+O(\log m),$$

引理 1 证毕.

引理 2 对任意实数 $x\geqslant 1$，设 m,n 为正整数，当 $m!<x\leqslant(m+1)$ 时有

$$\log m=\log\log n+O(\log\log m), \quad (2)$$

$$m=\frac{\log n}{\log\log n}+O\Big(\frac{\log n\cdot O(\log\log\log n)}{\log\log n+O(\log\log m)-1}\Big), \quad (3)$$

$$\log m!=\log n+O\Big(\frac{\log n\cdot\log\log\log n}{\log\log n}\Big). \quad (4)$$

证明　由式(1) 有

$$m=\frac{\log n}{\log m-1}+O(1), \tag{5}$$

对式(5) 两边继续取对数

$$\log m=\log\log n+O(\log\log m), \tag{6}$$

$$\log\log m=\log\log\log n+O(1),$$

$$m=\frac{\log n}{\log m-1}+O(1)=\frac{\log n}{\log\log n+O(\log\log m)-1}+O(1)=$$
$$\frac{\log n}{\log\log n}+O\left(\frac{\log n\cdot O(\log\log\log n)}{\log\log n+O(\log\log m)-1}\right),$$

$$m\log m-m+O(\log m)\ll\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)(\log\log n)-\frac{\log n}{\log\log n}\ll\log n,$$

即

$$\log m!=m\log m-m+O(\log m)=\log n+O\left(\frac{\log n\cdot\log\log\log n}{\log\log n}\right),$$

引理 2 证毕.

2　定理的证明

用初等方法及 Euler 求和公式[5] 给出定理的证明. 对任意实数 $x>2$,在序列$\{a(n)\}$,$(n=1,2,3,\cdots)$ 中,如果 $m!\leqslant n<(m+1)!$,由

$$\underbrace{1}_{1!},\underbrace{2,3,4,5}_{2!},\underbrace{6,7\cdots23}_{3!},\underbrace{24,25\cdots119}_{4!},\underbrace{120,121\cdots719}_{5!},\underbrace{720,37\cdots5039}_{6!},\underbrace{5040,48\cdots40319}_{7!},\underbrace{40320,65\cdots362879}_{8!},\cdots$$

可推断 $b(n)=m!$,$a(n)=(m+1)!$

$$\sum_{n\leqslant x}\log a(n)=\sum_{0!<n\leqslant 1!}\log a(1)+\sum_{1!<n\leqslant 2!}\log a(2)+\sum_{2!<n\leqslant 3!}\log a(3)+\cdots+$$
$$\sum_{(M-1)!<n\leqslant M!}\log(a(n))+\sum_{M!<n\leqslant x}\log(a(n))=\sum_{n\leqslant x}\sum_{(k-1)!<n\leqslant k!}\log(a(n)).$$

由引理 2 得

$$\sum_{n\leqslant x}\log a(n)=\sum_{n\leqslant x}\left(\log n+O\left(\frac{\log n\cdot\log\log\log n}{\log\log n}\right)\right)=\sum_{n\leqslant x}\log n+O\left(\sum_{n\leqslant x}\frac{\log n\cdot\log\log\log n}{\log\log n}\right)=$$
$$x\log x+O\left(\frac{x\log x\cdot\log\log\log x}{\log\log x}\right).$$

同理可得

$$\sum_{n\leqslant x}\log(b(n))=x\log x+O\left(\frac{x\log x\cdot\log\log\log x}{\log\log x}\right),$$

定理证毕.

在定理中,取 $x=n$,则

$$S_n(n)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\log(a(n))}{n}=\frac{1}{n}\left(n\log n+O\left(\frac{n\log n\cdot\log\log\log n}{\log\log n}\right)\right)=\log n+O\left(\frac{\log n\cdot\log\log\log n}{\log\log n}\right),$$

$$I_n(n)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\log(b(n))}{n}=\frac{1}{n}\left(n\log n+O\left(\frac{n\log n\cdot\log\log\log n}{\log\log n}\right)\right)=\log n+O\left(\frac{\log n\cdot\log\log\log n}{\log\log n}\right),$$

$$K_n(n)=(\sum_{i=1}^{n}\log(a(n)))^{\frac{1}{n}}=\left(n\log n+O\left(\frac{n\log n\cdot\log\log\log n}{\log\log n}\right)\right)^{\frac{1}{n}},$$

$$L_n(n)=(\sum_{i=1}^{n}\log(b(n)))^{\frac{1}{n}}=\left(n\log n+O\left(\frac{n\log n\cdot\log\log\log n}{\log\log n}\right)\right)^{\frac{1}{n}},$$

可得

$$\frac{S_n(n)}{I_n(n)}=\frac{\log n+O\left(\frac{\log n\cdot\log\log\log n}{\log\log n}\right)}{\log n+O\left(\frac{\log n\cdot\log\log\log n}{\log\log n}\right)}=1+O\left(\frac{\log n\cdot\log\log\log n}{\log\log n}\right)^{-1},$$

$$\frac{K_n(n)}{L_n(n)}=\frac{\left(n\log n+O\left(\frac{n\log n\cdot\log\log\log n}{\log\log n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}}{\left(n\log n+O\left(\frac{n\log n\cdot\log\log\log n}{\log\log n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}}=1+O\left(\frac{\log n\cdot\log\log\log n}{\log\log n}\right)^{-\frac{1}{n}},$$

因此有$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n(n)}{I_n(n)}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{K_n(n)}{L_n(n)}=1$，此外，注意到$\lim\limits_{n\to\infty}K_n(n)=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}L_n(n)=1$，因此

$$\lim_{n\to\infty}(K_n(n)-L_n(n))=0,$$

即推论1、2的结论.

又由于

$$S_n(n)-I_n(n)=\frac{1}{n}\left(\sum_{k\leqslant M}\sum_{(k-1)!<n\leqslant k!}\log\frac{k!}{(k-1)!}+\sum_{M!<n\leqslant x}\log\frac{(M+1)!}{M!}\right)=$$

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{k\leqslant M}\sum_{(k-1)!<n\leqslant k!}\log k+\sum_{M!<n\leqslant x}\log(M+1)\right)=$$

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{k\leqslant M}(k!-(k-1)!-1)\log k+\sum_{M!<n\leqslant x}\log(M+1)\right),$$

由引理得

$$S_n(n)-I_n(n)=\frac{1}{n}(m^2(m-1)!\log\log n+O(\log\log m)),$$

可得推论3

$$\lim_{n\to\infty}(S_n(n)-I_n(n))=0.$$

参考文献：

[1] Smarandache F. Only Problems，Not Solutions[M]. Chicago：Xiquan Publishing House，1993.

[2] Zhang Wen-peng. Research on Smarandache Problems in Number Theory[M]. Phoenix：Hexis，2004.

[3] Apostol Tom M. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York：Spring-Verlag，1976.

[4] Murth M R. Problems in Analytic Theory[M]. New York：Springer-verlag，2001.

[5] Smarandache F. Sequences of Numbers Involved in Unsolved Problems[M]. Phoenix：Hexis，2006.

[6] Huang Wei. On the Mean Value of Smarandache Prime Part $P(n)$ and $p(n)$[C]//. Research on Smaramtache Problems in Number Theory. Hexis，2010，100-104.

[7] 黄炜. K次方根序列的均值渐进公式[J]. 甘肃科学学报，2009，21(3)：49-52.

[8] 李超，杨存典，刘端森. Smarandache函数的均值分布性质[J]. 甘肃科学学报，2010，22(3)：47-50.

作者简介：

黄炜（1961-），男，陕西省岐山人，硕士，现为宝鸡职业技术学院教授，研究方向为解析数论与特殊函数.