第 43 卷 第 6 期　　内蒙古师范大学学报（自然科学汉文版）　　Vol. 43 No. 6
2014 年 11 月　　Journal of Inner Mongolia Normal University (Natural Science Edition)　　Nov. 2014

关于 Smarandache 伪 10 倍数数列的研究

巫朝霞，袁　泉

（新疆财经大学 应用数学学院，新疆 乌鲁木齐 830011）

摘　要：对 Smarandache 伪 10 倍数数列进行了研究. 首先，用初等方法给出数论函数$\{\frac{1}{n}\}$关于第一类、第二类伪 10 倍数数列的渐进公式，其次给出对任意函数通用的伪 10 倍数数列渐近公式，最后给出关于第一类、第二类伪 10 倍数个数的计算公式.

关键词：伪 10 倍数数列；渐进公式；初等方法

中图分类号：O 178　　文献标志码：A　　文章编号：1001—8735(2014)06—0669—05

1　引言及主要结果

文献[1]对伪 5 倍数数列进行了研究，得到结论：对任意实数 $x \geqslant 1$，有渐近公式

$$\sum_{\substack{n \in \mathrm{A} \\ n \leqslant x}} f(n) = \sum_{n \leqslant x} f(n) + O(M x^{\frac{\ln 8}{\ln 10}}),$$

其中 $M = \max\limits_{1 \leqslant n \leqslant x}\{|f(n)|\}$，A 表示伪 5 倍数的集合.

文献[2]对第二类 Smarandache 伪 5 倍数数列、第二类 Smarandache 伪偶数数列、第二类 Smarandache 伪奇数数列进行了探讨，得到结论：对任意实数 $x \geqslant 1$，有渐近公式

$$\sum_{\substack{n \in \mathrm{B} \\ n \leqslant x}} \frac{1}{n} = \frac{4}{5}\ln x + \frac{4\gamma + \ln 5}{5} - B_1 + O(x^{\frac{\ln 8}{\ln 10}-1}),$$

$$\sum_{\substack{n \in \mathrm{C} \\ n \leqslant x}} \frac{1}{n} = \frac{1}{2}\ln x + \frac{\gamma + \ln 2}{2} - B_2 + O(x^{-\ln 2}),$$

$$\sum_{\substack{n \in \mathrm{D} \\ n \leqslant x}} \frac{1}{n} = \frac{1}{2}\ln x + \frac{\gamma + \ln 2}{2} - B_3 + O(x^{-\ln 2}).$$

其中 B,C,D 分别表示第二类 Smarandache 伪 5 倍数的集合、第二类 Smarandache 伪偶数的集合、第二类 Smarandache 伪奇数的集合. B_1, B_2, B_3 分别表示一个常数.

文献[3]用解析方法对第二类伪 5 倍数进行了研究，文献[4]研究了伪奇数倍、伪偶数倍数列的性质，文献[5]主要研究了伪偶数倍数列，并得出较强的渐近公式. 本文给出第一类、第二类伪 10 倍数数列的概念，并研究它们的性质. 下面给出伪 10 倍数数列的定义.

一个正整数称为第一类伪 10 倍数，如果将其各位数字进行置换包括恒等置换后所得数字是 10 的倍数. 显然，所有某位是 0 的整数均为伪 10 倍数，例如 0，10，20，…，100，101，102，…. 类似地，一个正整数称为第二类伪 10 倍数，如果它本身不是 10 的倍数，但对它的数位作某个置换后就变成 10 的倍数，例如 0，101，102，103，…. 现设 A 表示所有第一类伪 10 倍数的集合，B 表示所有第二类伪 10 倍数的集合.

本文首先对数论函数$\{\frac{1}{n}\}$进行了探究，给出$\{\frac{1}{n}\}$关于第一类、第二类伪 10 倍数数列的渐近公式，其次，给出对任意函数通用的渐近公式，最后给出关于第一类、第二类伪 10 倍数个数的计算公式.

收稿日期：2014-06-11

基金项目：新疆自然科学基金资助项目(2014211A001)

作者简介：巫朝霞(1975—)，女，新疆乌鲁木齐人，新疆财经大学副教授，主要从事高等数学教学研究.

定理 1 对任意实数 $x \geqslant 1$,有渐近公式

$$\sum_{\substack{n \in A \\ n \leqslant x}} \frac{1}{n} = \ln x + \gamma - C + O(x^{\frac{2\ln 3}{\ln 10}-1}),$$

$$\sum_{\substack{n \in B \\ n \leqslant x}} \frac{1}{n} = \frac{9}{10}\ln x + \frac{9\gamma}{10} + D + O(x^{\frac{2\ln 3}{\ln 10}-1}),$$

其中 C,D 分别为常数.

定理 2 对任意实数 $x \geqslant 1$,有渐近公式

$$\sum_{\substack{n \in A \\ n \leqslant x}} f(n) = \sum_{n \leqslant x} f(n) + O(Mx^{\frac{2\ln 3}{\ln 10}}),$$

其中 $M = \max\limits_{1 \leqslant n \leqslant x}\{|f(n)|\}$.

推论 1 对任意实数 $x \geqslant 1$,有渐近公式

$$\sum_{\substack{n \in A \\ n \leqslant x}} \Omega(n) = x \ln\ln x + Cx + O(\frac{x}{\ln x}),$$

$$\sum_{\substack{n \in A \\ n \leqslant x}} d(n) = x \ln x + (2\gamma - 1)x + O(x^{\frac{2\ln 3}{\ln 10}+\varepsilon}),$$

其中 $\Omega(n)$ 表示 n 的所有素因子的个数,$d(n)$ 为 Dirichlet 除数函数,γ 为欧拉常数,ε 为任意给定的正数,C 为可计算的常数.

定理 3 对任意 $x \in R$,$x > 1$,记 x 的整数部分的十进制展开式为 $[x] = a_m 10^m + a_{m-1}10^{m-1} + \cdots + a_1 10 + a_0$,其中 $0 \leqslant a_i \leqslant 9$ $(i = 0, 1, \cdots, m)$ 为正整数且 $a_m \neq 0$. 若令 $k = \max\{i : a_i = 0, i = 0, 1, \cdots, m\}$,则对第一类伪 10 倍数数列有

(1) 若 $0 \leqslant k < m$,有 $\sum\limits_{\substack{n \in A \\ n \leqslant x}} 1 = [x] - \frac{9}{8}(9^m - 1) - \sum\limits_{i=k+1}^{m}(a_i - 1)9^i$.

(2) 若 k 不存在,有 $\sum\limits_{\substack{n \in A \\ n \leqslant x}} 1 = [x] - \frac{9}{8}(9^m - 1) - \sum\limits_{i=0}^{m}(a_i - 1)9^i - 1$.

对第二类伪 10 倍数数列有:(1) 若 $0 < k < m$,且 $a_0 = 0$ 时,有

$$\sum_{\substack{n \in B \\ n \leqslant x}} 1 = [x] - \frac{9}{8}(9^m - 1) - \sum_{i=k+1}^{m}(a_i - 1)9^i - \sum_{i=1}^{m} a_i 10^{i-1} - 1.$$

若 $0 < k < m$,且 $a_0 \neq 0$ 时,有

$$\sum_{\substack{n \in B \\ n \leqslant x}} 1 = [x] - \frac{9}{8}(9^m - 1) - \sum_{i=k+1}^{m}(a_i - 1)9^i - \sum_{i=1}^{m} a_i 10^{i-1}.$$

(2) 若 k 不存在,有 $\sum\limits_{\substack{n \in B \\ n \leqslant x}} 1 = [x] - \frac{9}{8}(9^m - 1) - \sum\limits_{i=0}^{m}(a_i - 1)9^i - \sum\limits_{i=1}^{m} a_i 10^{i-1} - 1$.

2 引理

引理 1 对任意实数 $x \geqslant 1$,令 D 表示所有十进制数字各位数字为 1,2,3,4,5,6,7,8,9 的自然数集合,则有渐近公式 $\sum\limits_{\substack{n \in D \\ n \leqslant x}} \frac{1}{n} = C + O(x^{\frac{2\ln 3}{\ln 10}-1})$,其中 C 为可计算的常数.

证明 由集合 D 的定义知 D 中元素的各位数字为 1,2,3,4,5,6,7,8,9,不包含 0,所以 D 中所有一位数字有 9 个,所有二位数字有 9^2 个,…,所有 m 位数有 9^m 个. 因此

$$\sum_{n \in D} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots < 9 + \frac{9^2}{10} + \frac{9^3}{10^2} + \cdots = 9(1 + \frac{9}{10} + \frac{9^2}{10^2} + \cdots) = 90.$$

这说明无穷级数 $\sum\limits_{n \in D} \frac{1}{n}$ 是收敛的,令 C 表示此级数的值. 又对任意 $x \geqslant 1$,设正整数 k 满足 $10^k \leqslant x < 10^{k+1}$,

从而有 $9^k \leqslant 9^{\log x} = (9^{\log_9 x})^{\frac{1}{\log_9 10}} = x^{\frac{1}{\log_9 10}} = x^{\frac{2\ln 3}{\ln 10}}$.

$$\sum_{\substack{n\in D\\ n\leqslant x}} \frac{1}{n} = \sum_{n\in D} \frac{1}{n} - \sum_{\substack{n\in D\\ n>x}} \frac{1}{n} = C + O(\sum_{n\geqslant k} \frac{9^{n+1}}{10^n}) =$$

$$C + O(\frac{9^{k+1}}{10^k}(1 + \frac{9}{10} + \frac{9^2}{10^2} + \cdots)) = C + O(\frac{9^k}{10^k} \times 90) = C + O(x^{\frac{2\ln 3}{\ln 10}-1}).$$

3　定理证明

定理 1 的证明　对任意实数 $x \geqslant 1$，由公式[6] $\sum_{n\leqslant x} \frac{1}{n} = \ln x + \gamma + O(\frac{1}{x})$ 和引理 1 可得

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\leqslant x}} \frac{1}{n} = \sum_{n\leqslant x} \frac{1}{n} - \sum_{\substack{n\in D\\ n\leqslant x}} \frac{1}{n} = \ln x + \gamma + O(\frac{1}{x}) - C + O(x^{\frac{2\ln 3}{\ln 10}-1}) = \ln x + \gamma - C + O(x^{\frac{2\ln 3}{\ln 10}-1}),$$

$$\sum_{\substack{n\in B\\ n\leqslant x}} \frac{1}{n} = \sum_{n\leqslant x} \frac{1}{n} - \sum_{n\leqslant \frac{x}{10}} \frac{1}{10n} - \sum_{\substack{n\in D\\ n\leqslant x}} \frac{1}{n} =$$

$$\ln x + \gamma + O(\frac{1}{x}) - \frac{1}{10}[\ln \frac{x}{10} + \gamma + O(\frac{10}{x})] - C + O(x^{\frac{2\ln 3}{\ln 10}-1}) =$$

$$\frac{9}{10}\ln x + \frac{9\gamma + \ln 10}{10} + O(\frac{1}{x}) - C + O(x^{\frac{2\ln 3}{\ln 10}-1}) = \frac{9}{10}\ln x + \frac{9\gamma}{10} + D + O(x^{\frac{2\ln 3}{\ln 10}-1}).$$

定理 1 证毕.

定理 2 的证明　首先，设 $10^k \leqslant x < 10^{k+1} (k \geqslant 1)$，则有 $k \leqslant \log x < k+1$，由集合 A 的定义，可得不属于集合 A 且小于等于 x 的数的个数最多有 9^{k+2} 个. 事实上，在这些数中有 9 个一位数，即 $1,2,3,\cdots,9$；有 $C_9^1 C_9^1 = 81$ 个两位数；有 $C_9^1 C_9^1 C_9^1 = 9^3$ 个三位数；…；有 9^k 个 k 位数. 因此，不属于集合 A 且小于等于 x 的数的个数最多有 $9 + 9^2 + \cdots + 9^k = \frac{9}{8}(9^k - 1) \leqslant 9^{k+2}$ 个. 因为

$$9^k \leqslant 9^{\log x} = (9^{\log_9 x})^{\frac{1}{\log_9 10}} = x^{\frac{1}{\log_9 10}} = x^{\frac{2\ln 3}{\ln 10}},$$

所以有 $9^k = O(x^{\frac{2\ln 3}{\ln 10}})$. 设 M 表示 $|f(n)|(n \leqslant x)$ 的上界，则有 $\sum_{\substack{n\notin A\\ n\leqslant x}} f(n) = O(Mx^{\frac{2\ln 3}{\ln 10}})$. 于是有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\leqslant x}} f(n) = \sum_{n\leqslant x} f(n) - \sum_{\substack{n\notin A\\ n\leqslant x}} f(n) = \sum_{n\leqslant x} f(n) + O(Mx^{\frac{2\ln 3}{\ln 10}}).$$

定理 2 证毕.

推论 1 的证明　在定理 2 中取 $f(n) = \Omega(n)$，并由公式[6] $\sum_{n\leqslant x} \Omega(n) = x\ln\ln x + Cx + O(\frac{x}{\ln x})$ 和估计式 $\Omega(n) \ll x^{\varepsilon} (1 \leqslant n \leqslant x)$，可得

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\leqslant x}} \Omega(n) = \sum_{n\leqslant x} \Omega(n) - \sum_{\substack{n\notin A\\ n\leqslant x}} \Omega(n) = x\ln\ln x + Cx + O(\frac{x}{\ln x}) -$$

$$O(x^{\varepsilon} \cdot x^{\frac{2\ln 3}{\ln 10}}) = x\ln\ln x + Cx + O(\frac{x}{\ln x}).$$

同理取 $f(n) = d(n)$，并由公式[6] $\sum_{n\leqslant x} d(n) = x\ln x + (2\gamma - 1)x + O(x^{\frac{1}{2}})$ 和估计式 $d(n) \ll x^{\varepsilon} (1 \leqslant n \leqslant x)$，可得

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\leqslant x}} d(n) = \sum_{n\leqslant x} d(n) - \sum_{\substack{n\notin A\\ n\leqslant x}} d(n) = x\ln x + (2\gamma - 1)x +$$

$$O(x^{\frac{1}{2}}) - O(x^{\varepsilon} \cdot x^{\frac{2\ln 3}{\ln 10}}) = x\ln x + (2\gamma - 1)x + O(x^{\frac{2\ln 3}{\ln 10}+\varepsilon}).$$

推论 1 得证.

定理 3 的证明　事实上，若求 $[1,x]$ 之间第一类、第二类伪 10 倍数的个数，只需用 $[x]$ 减去 $[1,x]$ 之间非第一类、非第二类伪 10 倍数的个数. 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

下面用分类计算法,计算 $[1,x]$ 之间第一类伪 10 倍数的个数.

非第一类伪 10 倍数中每一位数有 9 种可能,所以所有一位数中有 9 个非第一类伪 10 倍数,即 $1,2,\cdots,9$;所有两位数中共有 9^2 个非第一类伪 10 倍数;所有三位数中共有 9^3 个非第一类伪 10 倍数;…;所有 m 位数中共有 9^m 非第一类伪 10 倍数.

(1) 若 $0\leqslant k<m$.

区间 $[10^m,a_m10^m)$ 之间有 $(a_m-1)\times 9^m$ 个非第一类伪 10 倍数;

区间 $[a_m10^m,a_m10^m+a_{m-1}10^{m-1})$ 之间有 $(a_{m-1}-1)\times 9^{m-1}$ 个非第一类伪 10 倍数;

…

区间 $[a_m10^m+\cdots+a_{k+2}10^{k+2},a_m10^m+\cdots+a_{k+2}10^{k+2}+a_{k+1}10^{k+1})$ 之间有 $(a_{k+1}-1)\times 9^{k+1}$ 个非第一类伪 10 倍数;

区间 $[a_m10^m+\cdots+a_{k+1}10^{k+1},a_m10^m+\cdots+a_{k+1}10^{k+1}+\cdots+a_0)$ 之间无非第一类伪 10 倍数. 而当 $0\leqslant k<m$ 时,$a_m10^m+\cdots+a_0$ 为第一类伪 10 倍数.

所以当 $0\leqslant k<m$ 时,有

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\leqslant x}}1=[x]-9-9^2-\cdots-9^m-(a_m-1)9^m-(a_{m-1}-1)9^{m-1}-\cdots-(a_{k+1}-1)9^{k+1}=$$

$$[x]-\frac{9}{8}(9^m-1)-\sum_{i=k+1}^{m}(a_i-1)9^i.$$

(2) 若 k 不存在,即所有 $a_i\neq 0\ (i=0,1,\cdots,m)$,此时 $a_m10^m+\cdots+a_0$ 不是第一类伪 10 倍数. 因此

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\leqslant x}}1=[x]-9-9^2-\cdots-9^m-(a_m-1)9^m-\cdots-(a_1-1)9-(a_0-1)-1=$$

$$[x]-\frac{9}{8}(9^m-1)-\sum_{i=0}^{m}(a_i-1)9^i-1.$$

下面计算 $[1,x]$ 之间第二类伪 10 倍数的个数.

(1) 当 $0<k<m$,且 $a_0=0$ 时,$a_m10^m+a_{m-1}10^{m-1}+\cdots+a_110+a_0$ 中共有 $\sum_{i=1}^{m}a_i10^{i-1}$ 个 10,且 $a_m10^m+a_{m-1}10^{m-1}+\cdots+a_110+a_0$ 为非第二类伪 10 倍数. 由于每 10 个数中,第一类伪 10 倍数的个数要比第二类伪 10 倍数的个数多 1,由此可得

$$\sum_{\substack{n\in B\\ n\leqslant x}}1=[x]-\frac{9}{8}(9^m-1)-\sum_{i=k+1}^{m}(a_i-1)9^i-\sum_{i=1}^{m}a_i10^{i-1}-1.$$

同理当 $0<k<m$,且 $a_0\neq 0$ 时,$a_m10^m+a_{m-1}10^{m-1}+\cdots+a_110+a_0$ 为第二类伪 10 倍数,由此可得

$$\sum_{\substack{n\in B\\ n\leqslant x}}1=[x]-\frac{9}{8}(9^m-1)-\sum_{i=k+1}^{m}(a_i-1)9^i-\sum_{i=1}^{m}a_i10^{i-1}.$$

(2) 若 k 不存在,此时 $a_m10^m+\cdots+a_0$ 不是第二类伪 10 倍数,所以

$$\sum_{\substack{n\in B\\ n\leqslant x}}1=[x]-\frac{9}{8}(9^m-1)-\sum_{i=0}^{m}(a_i-1)9^i-\sum_{i=1}^{m}a_i10^{i-1}-1.$$

定理 3 证毕.

参考文献:

[1] Zhang W P. Research on Smarandache Problems in Number theory [M]. USA:Hexis,2004:17-19.

[2] 李浩. 关于第二类 Smarandache 伪 5 倍数数列 [J]. 西北大学学报,2006,36(4):517-518.

[3] Liu H N,Gao J. Research on Some Smarandache Problems [M]. USA:The Euducational Publisher,2011:100-101.

[4] 武楠. 关于 Smarandache 伪偶数序列 [J]. 纺织高校基础科学学报,2008,21(3):378-380.

[5] Liu Y N. On the Smarandache Pseudo Number Sequence [J]. Chin Quart J of Math,2006,21(4):581-584.

[6] Apostol T M. Introduction to Analytic Number Theory [M]. New York:Springer-Verlag,1976:54-57.

Research on the Smarandache Pseudo-Multiples of 10 Number Sequence

WU Zhao-xia, YUAN Quan

(1. *School of Applied Mathematics, Xinjiang University of Finance and Economics, Urumqi* 830012, *China*)

Abstract: The Smarandache pseudo-multiples of 10 number sequence is studied in this paper. Firstly, the asymptotic formulas of first and second pseudo-multiples of 10 number sequence for function $\{\frac{1}{n}\}$ are given by suing elementary method. Secondly, an common asymptotic formula of pseudo-multiples 10 number sequence is given for arbitrary function. And lastly, some interesting formulas are given to compute the number of pseudo-multiples 10 number.

Key words: Smarandache pseudo-multiples of 10 number sequence; asymptotic formula; elementary method

【责任编辑 陈汉忠】

（上接第 668 页）

Analysis Study for the Problem Based on Elliptic Boundary with A Crack Under Pressure on Part of Boundary

ZHAO Xin-ping, YANG Li-ying, WU Guo-rong

(*College of Sciences, Inner Mongolia Agricultural University, Hohhot* 010018, *China*)

Abstract: By introducing a new conformal mapping function, an elasticity problem of a crack emanating from an elliptical hole is investigated by the method of complex variable function when the elliptical hole is subjected to internal pressure but the surface of crack is free of traction. The exact expressions of complex stress function are obtained. Moreover, the stress fields and the stress intensity factors at the crack tip are derived. As a special cases, the solutions of a crack originating from a circular hole which is subjected to internal pressure but the surface of crack is free of traction are given by the present result. At the same time, the present results can be reduced to some known solutions, such as a crack emanating from an elliptical hole and a circular hole subjected to internal pressure along the whole boundary.

Key words: an elliptic hole with a crack; pressure on the part of boundary; stress intensity factors; conformal mapping; analytic solutions

【责任编辑 陈汉忠】