文章编号：1004-3918（2017）04-0521-05

关于Smarandache函数$S(n)$在简单数序列上的均值研究

白甲志， 黄 炜

（宝鸡职业技术学院 基础部，陕西 宝鸡 721013）

摘 要：利用初等方法研究了Smarandache函数$S(n)$在简单数序列上的均值性质，并得到了两个有趣的渐进公式．

关键词：Smarandache函数$S(n)$；简单数序列；均值性质；渐近公式

中图分类号：O 156.4 **文献标识码**：A

On the Mean Value Properties of the Sequence of Simple Numbers for the Smarandache Function $S(n)$

BAI Jiazhi， HUANG Wei

（Basic Department Baoji Vocational and Technical College，Baoji 721013，Shaanxi China）

Abstract：In this paper，we use the elementary method to study the mean value properties of the sequence of simple numbers，and several asymptotic formulas are given.

Key words：Smarandache function $S(n)$；simple numbers；mean value；asymptotic formula

1 引言及结论

对于任意的正整数n，著名的Smarandache函数$S(n)$定义为[1-6]最小的正整数m，即：$S(n)=\min\{m: n\mid m!, m\in N\}$，该数列的前几项为：

$$1,2,3,4,5,3,7,4,6,5,11,4,13,7,5,6,17,6,19,5,7,\cdots.$$

从$S(n)$的定义和性质，很容易推断，对于任意正整数n，若它的标准素因数分解式是$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$，则有$S(n)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{S(p_i^{\alpha_i})\}$．关于这一问题，不少文献[1-20]作过一些研究，得到了很好的结果，例如：文献[2]研究了Smarandache函数的值分布性质，获得了更深刻的结果：设$P(n)$表示n最大素因数，对于任意整数$x>1$，我们有渐进公式：

$$\sum_{n\leqslant x}\left(S(n)-P(n)\right)^2=\frac{2\zeta(\frac{3}{2})x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}+O(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}).$$

文献[3]研究了函数$S^k(n)$和$\dfrac{S^k(n)}{n}$的均值，并得到几个有趣的渐近公式，

$$\sum_{n\leqslant x}S^k(n)=\frac{\zeta(k+1)}{k+1}\cdot\frac{x^{k+1}}{\ln x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^2 x}\right)$$

收稿日期：2016-09-31

基金项目：国家自然科学基金项目（11201363）；陕西省自然科学基金项目资助（15JK1262）

作者简介：白甲志（1960-），男，副教授，主要从事数学研究与教学管理；

黄 炜（1961-），男，教授，硕士，主要从事数论研究．

及

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{S^k(n)}{n}=\frac{2\zeta(k+1)}{k+1}\cdot\frac{x^k}{\ln x}+O\left(\frac{x^k}{\ln^2 x}\right).$$

其中：$\zeta(n)$为Riemann Zeta-函数．

对任意的正整数n，Smarandache简单数集A定义为[9-16]：n的真因子的乘积不超过n，就称n为简单数．即$A=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,13,14,15,17,19,21,\cdots\}$．用$q_d(n)$表示小于$n$的真因子积，即$q_d(n)=\prod_{d|n,d<n} d$，如$q_d(2)=1,q_d(3)=1$，$q_d(4)=2$，$q_d(5)=1$，$q_d(6)=6$，$q_d(p)=1$，$\cdots$．

在文献[1]中，罗马尼亚数论专家F. Smarandache教授在第26个问题中提出了研究简单数序列的性质，关于这一问题，文献[9-16]中作过一些研究，得到了部分结果．本文在前人关于算术函数的均值问题的研究成果的基础上，主要利用初等的方法研究Smarandache函数$S(n)$在简单数序列上的均值性质．并得到两个有趣的渐进公式，即就是我们将证明以下结论．

定理1　对于任意整数$x\geqslant 2$，有下面的渐进公式

$$\sum_{n\leqslant x,n\in A}S^k(n)=\frac{Bx^{k+1}}{(k+1)\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{C_i\cdot x^{k+1}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中：$B,C_i(i=2,3,\cdots,k)$是可计算常数．

定理2　对于任意整数$x\geqslant 2$，有下面的渐进公式

$$\sum_{n\leqslant x,n\in A}\frac{1}{S(n)}=D\ln\ln x+\frac{E\sqrt{x}\ln\ln x}{\ln x}+O\left(\frac{\sqrt{x}}{\ln x}\right),$$

其中：D，E是可计算常数．

为了完成定理的证明，我们需要下面几个简单的引理：

引理1[6]　1)对于任何正整数α_i，则

$$S(p_i^{\alpha_i})<\alpha_i p_i,$$

当$\alpha_i<p_i$，我们有$S(p_i^{\alpha_i})=\alpha_i p_i$，这里$p_i$是素数．

2)对于任意正整数n，若它的标准素因数分解式是$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$，则有$S(n)=\max_{1\leqslant i\leqslant k}\{S(p_i^{\alpha_i})\}$．

3)设$P(n)$是n的最大素因子，如果$P>\sqrt{n}$，则我们有：$S(n)=P(n)$，特别是对于任意的素数p，有$S(p^{\alpha})=p$．

引理2[12]　设$x\in A$，则$n=p,n=p^2,n=p^3$，或$n=pq$ 4种不同的情形，其中p,q是不同的素数．

引理3　设实数$x\geqslant 3$，p,q是不同的素数，我们有

$$\sum_{p\leqslant x}p^k=\frac{1}{k+1}\frac{x^{k+1}}{\ln x}+\frac{1}{(k+1)^2}\frac{x^{k+1}}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^3 x}\right).$$

当k=1可得：

$$\sum_{p\leqslant x}p=\frac{1}{2}\frac{x^2}{\ln x}+\frac{1}{4}\frac{x^2}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^3 x}\right);$$

当k=0可得：

$$\sum_{p\leqslant n}1=\frac{x}{\ln x}+\frac{x}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x}{\ln^3 x}\right).$$

证明　由引理3 $\pi(x)=\frac{x}{\ln x}+\frac{x}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x}{\ln^3 x}\right)$，再由Abel求和公式，我们有：

$$\sum_{p\leqslant x}p^k=x^k\cdot\pi(x)-\int_1^x\pi(y)ky^{k-1}\mathrm{d}y=$$

$$\frac{x^{k+1}}{\ln x}+\frac{x^{k+1}}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^3 x}\right)-k\int_2^x\frac{y^k}{\ln y}\mathrm{d}y-k\int_2^x\frac{y^k}{\ln^2 y}\mathrm{d}y+O\left(\int_2^x\frac{y^k}{\ln^3 y}\mathrm{d}y\right)=$$

$$\frac{x^{k+1}}{\ln x}+\frac{x^{k+1}}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^3 x}\right)-\frac{k}{k+1}\frac{x^{k+1}}{\ln x}-\frac{k}{k+1}\frac{x^{k+1}}{\ln^2 x}+O\left(\int_2^x\frac{y^k}{\ln^3 y}\mathrm{d}y\right)=$$

$$\frac{1}{k+1}\frac{x^{k+1}}{\ln x}+\frac{1}{(k+1)^2}\frac{x^{k+1}}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^3 x}\right).$$

引理4[4]　设实数 $x\geqslant 3$，p,q 是不同的素数，我们有

$$\sum_{pq\leqslant x}pq=\frac{x^2}{\ln x}\ln\ln x+A_0\frac{x^2}{\ln x}+A_0\frac{x^2}{2\ln^2 x}\ln\ln x+O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right).$$

引理5　设实数 $x\geqslant 3$，p,q 是不同的素数，我们有

$$\sum_{\substack{pq\leqslant x\\ p<q}}q^k=\frac{B_1}{k+1}\frac{x^{k+1}}{\ln x}+\frac{B_2}{(k+1)^2}\frac{x^{k+1}}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^3 x}\right).$$

当k=1可得：

$$\sum_{\substack{pq\leqslant x\\ p<q}}q=C_1\frac{x^2}{\ln x}+C_2\frac{x^2}{\ln^2 x}+O(\frac{x^2}{\ln^3 x}).$$

证明　当 $x<1$ 时，由麦克劳林幂级数我们有：$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^m+\cdots$ 及引理5

$$\sum_{pq\leqslant x}q^k=2\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\left(\sum_{q\leqslant\frac{x}{p}}q^k-\sum_{p\leqslant q}q^k\right)=2\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\left\{\frac{1}{k+1}\frac{\left(\frac{x}{p}\right)^{k+1}}{\ln\frac{x}{p}}+\frac{1}{(k+1)^2}\frac{\left(\frac{x}{p}\right)^{k+1}}{\ln^2\frac{x}{p}}+O\left(\frac{\left(\frac{x}{p}\right)^{k+1}}{\ln^3\frac{x}{p}}\right)-\right.$$

$$\left.\frac{1}{k+1}\frac{p^{k+1}}{\ln p}-\frac{1}{(k+1)^2}\frac{p^{k+1}}{\ln^2 p}-O\left(\frac{p^{k+1}}{\ln^3 p}\right)\right\}=2\frac{1}{k+1}\frac{x^{k+1}}{\ln x}\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{p^{k+1}\ln\frac{x}{p}}+$$

$$2\frac{1}{(k+1)^2}\frac{x^{k+1}}{\ln x}\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{p^{k+1}\ln\frac{x}{p}}+O\left(\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\frac{x^{k+1}}{p^{k+1}\ln^3\frac{x}{p}}\right)-2\frac{1}{k+1}\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\left(\frac{p^{k+1}}{\ln p}+\frac{1}{k+1}\frac{p^{k+1}}{\ln^2 p}+O\left(\frac{p^{k+1}}{\ln^3 p}\right)\right)=$$

$$2\frac{1}{k+1}\frac{x^{k+1}}{\ln x}\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{p^{k+1}}\left(1+\frac{\ln p}{\ln x}+\frac{\ln^2 p}{\ln^2 x}+\cdots+\frac{\ln^2 p}{\ln^2 x}+\cdots\right)+$$

$$2\frac{1}{(k+1)^2}\frac{x^{k+1}}{\ln x}\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{p^{k+1}}\left(1+2\frac{\ln p}{\ln x}+3\frac{\ln^2 p}{\ln^2 x}+\cdots+m\frac{\ln^2 p}{\ln^2 x}+\cdots\right)+O\left(\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\frac{x^{k+1}}{p^{k+1}\ln^3\frac{x}{p}}\right)-$$

$$2\frac{1}{k+1}\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\left(\frac{p^{k+1}}{\ln p}+\frac{1}{k+1}\frac{p^{k+1}}{\ln^2 p}+O\left(\frac{p^{k+1}}{\ln^3 p}\right)\right)=2\frac{1}{k+1}\frac{x^{k+1}}{\ln x}\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{p^{k+1}}+$$

$$2\frac{x^{k+1}}{\ln^2 x}\left(\frac{1}{k+1}\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\frac{\ln p}{p^{k+1}}+\frac{1}{(k+1)^2}\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\frac{l}{p^{k+1}}\right)+O\left(\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\frac{x^{k+1}}{p^{k+1}\ln^3\frac{x}{p}}\right)-$$

$$2\frac{1}{k+1}\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\left(\frac{p^{k+1}}{\ln p}+\frac{1}{k+1}\frac{p^{k+1}}{\ln^2 p}+O\left(\frac{p^{k+1}}{\ln^3 p}\right)\right)=\frac{B_1}{k+1}\frac{x^{k+1}}{\ln x}+\frac{B_2}{(k+1)^2}\frac{x^{k+1}}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^3 x}\right).$$

2 定理的证明

定理1的证明.

根据函数$S(n)$的定义及其引理2和3可得[15-21]

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ x\in A}}S^k(n)=\sum_{p\leqslant x}S^k(p)+\sum_{p^2\leqslant x}S^k\left(p^2\right)+\sum_{p^3\leqslant x}S^k\left(p^3\right)+\sum_{\substack{pq\leqslant x\\ p<q}}S^k(pq)$$

$$\sum_{p\leqslant x}p^k+\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}p^{2k}+\sum_{2<p\leqslant\sqrt[3]{x}}p^{3k}+\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\sum_{p<q\leqslant\frac{x}{p}}q^k.$$

由引理4可得

$$\sum_{p\leqslant x}p^k=\frac{1}{k+1}\frac{x^{k+1}}{\ln x}+\frac{1}{(k+1)^2}\frac{x^{k+1}}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^3 x}\right),\tag{1}$$

$$\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}p^{2k}=\frac{2}{2k+1}\frac{x^{\frac{2k+1}{2}}}{\ln x}+\frac{2^2}{(2k+1)^2}\frac{x^{\frac{2k+1}{2}}}{\ln^2 x}+O\left(\frac{2^3x^{\frac{2k+1}{2}}}{\ln^3 x}\right),\tag{2}$$

$$\sum_{p\leqslant\sqrt[3]{x}}p^{3k}=\frac{3}{3k+1}\frac{x^{\frac{3k+1}{3}}}{\ln x}+\frac{3^2}{(3k+1)^2}\frac{x^{\frac{3k+1}{3}}}{\ln^2 x}+O\left(\frac{3^3x^{\frac{3k+1}{3}}}{\ln^3 x}\right).\tag{3}$$

由引理5可得

$$\sum_{pq\leqslant x}q^k=\frac{B_1}{k+1}\frac{x^{k+1}}{\ln x}+\frac{B_2}{(k+1)^2}\frac{x^{k+1}}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^3 x}\right).\tag{4}$$

由(1)~(4)式我们立即有:

$$\sum_{n\leqslant x,n\in A}S^k(n)=\frac{Bx^{k+1}}{(k+1)\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{C_i\cdot x^{k+1}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中:B,$C_i(i=2,3,\cdots,k)$是可计算常数.

定理2的证明.

$$\sum_{n\leqslant x,n\in A}\frac{1}{S(n)}=\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}+\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{p^2}+\sum_{2<p\leqslant\sqrt[3]{x}}\frac{1}{p^3}+\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\sum_{p<q\leqslant\frac{x}{p}}\frac{1}{q}.$$

由文献[10]我们有:对于任何实数$x>1$,有渐近公式

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}=\ln\ln x+A_1+O\left(\frac{1}{\ln x}\right),\tag{5}$$

$$\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{p}=2\ln\ln x+A_2+O\left(\frac{1}{\ln x}\right),\tag{6}$$

$$\sum_{p\leqslant\sqrt[3]{x}}\frac{1}{p}=3\ln\ln x+A_3+O\left(\frac{1}{\ln x}\right),\tag{7}$$

而且

$$\sum_{p\le\sqrt{x}}\sum_{p<q\le\frac{x}{p}}\frac{1}{q}=\sum_{p\le\sqrt{x}}\left[\ln(\ln x-\ln p)-\ln\ln p+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right]=$$
$$\sum_{p\le\sqrt{x}}\left[\ln\ln x+\ln\left(1-\frac{\ln p}{\ln x}\right)\right]-\sum_{p\le\sqrt{x}}\ln\ln p+O\left(\sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{1}{\ln x}\right)=\frac{E\sqrt{x}\ln\ln x}{\ln x}+O\left(\frac{\sqrt{x}}{\ln x}\right). \tag{8}$$

由(5)~(8)式我们立即有：

$$\sum_{n\le x,n\in A}\frac{1}{S(n)}=D\ln\ln x+\frac{E\sqrt{x}\ln\ln x}{\ln x}+O\left(\frac{\sqrt{x}}{\ln x}\right),$$

其中：D，E 是可计算常数.

参考文献：

[1] SMARANDACHE F. Only proplem，not solution[M]. Chicago：Xiquan Publishing House，1993.

[2] WANG Yongxing. On the Smarandache Function[C]//Reserch on Smarandache Problem in Number Theory，USA：Hexis，2005：103-106.

[3] LU Yaming. On the solution of an equation involving the smarandache function [J]. Scientia Magna，2006，2(1)：76-79.

[4] SANDOR J. On a dual of the Pseudo-Smarandache function[J]. Smarandache Notions，2002，13：18-23.

[5] 徐哲峰. 关于Smarandache函数的值分布[J]. 数学学报(中文版)，2006，49(5)：1009-1012.

[6] 黄炜. Smarandache复合函数的渐近公式[J]. 吉首大学学报(自然科学版)，2011，32(5)：9-10.

[7] 黄炜. 一个包含Smarandache函数的复合函数的均值[J]. 科学技术与工程，2009，39(16)：5432-5434.

[8] 刘燕妮. Slnarandaehe 未解决的问题及新进展[M]. Ann Arbor：High America Press，2008.

[9] 李超，杨存典，刘端森. Smarandach函数的均值分布性质[J]. 甘肃科学学报，2010，22(3)：24-27.

[10] 刘红艳. 关于简单数序列的均值性质[J]. 宁夏大学学报(自然科学版)，2003，24(1)：28-30.

[11] 王明军. 关于简单数序列的一些研究[J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2011，36(3)：14-17.

[12] 王丽丽，朱伟义. 有关简单数序列的若干均值性质 [J]. 渭南师范学院学报，2014，29(11)：8-10.

[13] 张梅，郭金保. 关于简单数序列的均值 [J]. 延安大学学报(自然科学版)，2005，24(3)：5-6.

[14] 王明军. 简单数序列的两个渐近公式[J]. 河南科学，2014，32(11)：2218-2220.

[15] MA J P. An equation involving the smarandache function[J]. Scientia Magna，2005，2：89-90.

[16] 刘华宁，高静. 关于一些 Smarandache 问题的研究[M]. The Educational Publisher，2011：48-50.

[17] 刘红艳. 一个新的算术函数及其值分布[J]. 纯粹数学与应用数学，2009，39(1)：6-8.

[18] 潘承洞，潘承彪. 解析数论基础[M]. 北京：科学出版社，1999.

[19] 张文鹏. 初等数论[M]. 西安：陕西师范大学出版社，2007.

[20] APOSTOL T M. Introduction to analytic number theory[M]. New York：Spring verlag，1976.

（编辑　张松林）