2008年6月 纯粹数学与应用数学 Jun. 2008
第24卷 第2期 Pure and Applied Mathematics Vol.24 No.2

关于 Smarandache 函数的一个问题

张爱玲

(西安理工大学高等技术学院, 陕西 西安 710082)

摘 要: 对任意正整数 n, 著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n \mid m!$. 即就是 $S(n)=\min\{m:\ m\in\mathbb{N},\ n|m!\}$. 令 $\mathrm{PS}(n)$ 表示区间 $[1,\ n]$ 中 $S(n)$ 为素数的正整数 n 的个数. 在一篇未发表的文献中, J.Castillo 建议我们研究当 $n\to\infty$ 时, 比值 $\mathrm{PS}(n)/n$ 的极限存在问题. 如果存在, 确定其极限. 本文的主要目的是利用初等方法研究这一问题, 并得到彻底解决! 即就是证明该极限存在且为 1.

关 键 词: Smarandache 函数; 素数; 极限
中图分类号: O178 **文献标识码**: A **文章编号**: 1008-5513(2008)02-0385-03

1 引言及结论

对任意正整数 n, 著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n \mid m!$. 即就是 $S(n)=\min\{m:\ m\in\mathbb{N},\ n|m!\}$. 这一函数是美籍罗马尼亚著名数论专家 F.Smarandache 教授在他书中引入的 [1], 并建议人们研究它的性质! 从 $S(n)$ 的定义人们容易推出如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 表示 n 的标准分解式, 那么 $S(n)=\max\limits_{1\le i\le r}\{S(p_i^{\alpha_i})\}$. 由此我们也不难计算出 $S(n)$ 的前几个值为: $S(1)=1$, $S(2)=2$, $S(3)=3$, $S(4)=4$, $S(5)=5$, $S(6)=3$, $S(7)=7$, $S(8)=4$, $S(9)=6$, $S(10)=5$, $S(11)=11$, $S(12)=4$, $S(13)=13$, $S(14)=7$, $S(15)=5$, $S(16)=6$, $\cdots\cdots$. 关于 $S(n)$ 的算术性质, 许多学者进行了研究, 获得了不少有趣的结果! 参阅文献 [2-6]. 例如, 文 [2-3] 研究了一类包含 $S(n)$ 方程的可解性, 证明了该方程有无穷多组正整数解. 即就是证明了对任意正整数 $k\ge 2$, 方程 $S(m_1+m_2+\cdots+m_k)=S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k)$ 有无穷多组正整数解 $(m_1,m_2,\cdots,m_k)$.

文 [4] 获得了有关 $S(n)$ 的一个深刻结果! 也就是证明了渐近公式

$$\sum_{n\le x}(S(n)-P(n))^2=\frac{2\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right)$$

其中 $P(n)$ 表示 n 的最大素因子, $\zeta(s)$ 表示 Riemann zeta- 函数.

文 [5] 研究了关于 Smarandache 函数的一个猜想, 即就是证明了当 n 为某些特殊整数 (例如 n 为无平方因子数) 时, 和式 $\sum_{d|n}\frac{1}{S(d)}$ 不可能为整数.

现在我们令 $\mathrm{PS}(n)$ 表示区间 $[1,\ n]$ 中 $S(n)$ 为素数的正整数 n 的个数. 在一篇未发表的文献中, Castillo J 建议我们研究极限 $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\dfrac{\mathrm{PS}(n)}{n}$ 的存在问题. 如果存在, 确定其极限. 这一问题是有趣的, 它揭示了 Smarandache 函数 $S(n)$ 值分布的规律性, 同时也说明在绝大多数情况下, Smarandache 函数 $S(n)$ 取素数值!

收稿日期: 2006-11-10.
基金项目: 国家自然科学基金 (10671155).
作者简介: 张爱玲 (1972-), 讲师, 研究方向: 软件工程与基础数学的教学与研究.

然而关于这一问题, 由于不知道从何下手, 所以至今没有人研究, 至少我们没有看到过有关方面的论文. 本文的主要目的是利用初等方法研究这一问题, 并得到彻底解决! 具体地说也就是证明了下面的:

定理 对任意正整数 $n>1$, 我们有渐近公式

$$\frac{\mathrm{PS}(n)}{n}=1+O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$$

显然这是一个比 Castillo J 问题更强的结论. 当然如何改进上式当然如何改进上式中的误差项也是一个有意义的问题, 有待于我们进一步研究! 由此定理我们立刻得到下面的

推论 对任意正整数 n, 我们有极限 $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\dfrac{\mathrm{PS}(n)}{n}=1.$

2 定理的证明

这节我们利用初等方法给出定理的直接证明. 首先我们估计 $n-\mathrm{PS}(n)$ 的上界. 事实上当 $n>1$ 时, 设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 表示 n 的标准分解式, 那么由函数 $S(n)$ 的定义及性质可设 $S(n)=S\left(p_i^{\alpha_i}\right)=m\cdot p_i$. 若 $\alpha_i=1$, 那么 $m=1$ 且 $S(n)=p_i$ 为素数. 若 $\alpha_i>1$, 那么 $m>1$, 则 $S(n)$ 为合数. 所以 $n-\mathrm{PS}(n)$ 为区间 $[1,\ n]$ 中所有 $S(n)=1$ 及 $S(n)$ 为合数的 n 的个数! 显然 $S(n)=1$ 当且仅当 $n=1$. 于是令 $M=\ln n$, 则我们有

$$n-\mathrm{PS}(n)=1+\sum_{\substack{k\le n\\ S(k)=S(p^\alpha),\ \alpha\ge2}}1\le 1+\sum_{S(k)\le M}1+\sum_{\substack{kp^\alpha\le n\\ \alpha p>M,\ \alpha\ge 2}}1 \tag{1}$$

现在我们分别估计 (1) 式中的各项, 显然有

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{kp^\alpha\le n\\ \alpha p>M,\ \alpha\ge2}}1&\le\sum_{\substack{kp^2\le n\\ 2p>M}}1+\sum_{\substack{kp^\alpha\le n\\ \alpha p>M,\ \alpha\ge3}}1\le\sum_{\frac{M}{2}<p\le\sqrt{n}}\sum_{k\le\frac{n}{p^2}}1+\sum_{\substack{p^\alpha\le n\\ \alpha p>M,\ \alpha\ge3}}\sum_{k\le\frac{n}{p^\alpha}}1\\&\ll\sum_{\frac{M}{2}<p\le\sqrt{n}}\frac{n}{p^2}+\sum_{\substack{p^\alpha\le n\\ \alpha p>M,\ \alpha\ge3}}\frac{n}{p^\alpha}\ll\frac{n}{\ln n}+\sum_{\substack{p\le\sqrt{n}\\ \alpha p>M,\ \alpha\ge p}}\frac{n}{p^\alpha}+\sum_{\substack{p\le\sqrt{n}\\ \alpha p>M,\ 3\le\alpha<p}}\frac{n}{p^\alpha}\\&\ll\frac{n}{\ln n}+\sum_{\substack{p\le\sqrt{n}\\ \alpha>\sqrt{M}}}\frac{n}{p^\alpha}+\sum_{\substack{p\le\sqrt{n}\\ p>\sqrt{M},\ \alpha\ge3}}\frac{n}{p^\alpha}\ll\frac{n}{\ln n}+\frac{n}{2^{\sqrt{M}-1}}+\frac{n}{M}\ll\frac{n}{\ln n}\end{aligned}\tag{2}$$

对于 (1) 式中的另一项, 我们需要采取新的估计方法. 对任意素数 $p\le M$, 令 $\alpha(p)=\left[\frac{M}{p-1}\right]$, 即就是 $\alpha(p)$ 表示不超过 $\frac{M}{p-1}$ 的最大整数. 设 $u=\prod_{p\le M}p^{\alpha(p)}$. 对任意满足 $S(k)\le M$ 的正整数 k, 设 $S(k)=S(p^\alpha)$, 则由 $S(k)$ 的定义一定有 $p^\alpha|M!$, 从而 $\alpha\le\sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{M}{p^j}\right]\le\frac{M}{p-1}$, 所以所有满足 $S(k)\le M$ 的正整数 k 一定整除 u, 而这样 k 的个数不会超过 u 的正因数的个数, 即就是 $d(u)$. 所以我们有

$$\sum_{S(k)\le M}1\le\sum_{d|u}1=\prod_{p\le M}(1+\alpha(p))=\prod_{p\le M}\left(1+\left[\frac{M}{p-1}\right]\right)=\exp\left(\sum_{p\le M}\ln\left(1+\left[\frac{M}{p-1}\right]\right)\right) \tag{3}$$

其中 $\exp(y)=e^y$.

由素数定理的两种形式 [7-8]: $\pi(M)=\sum_{p\le M}1=\frac{M}{\ln M}+O\left(\frac{M}{\ln^2 M}\right)$, $\sum_{p\le M}\ln p=M+O\left(\frac{M}{\ln M}\right)$. 可得

$$\sum_{p\le M}\ln\left(1+\left[\frac{M}{p-1}\right]\right)\le\sum_{p\le M}\ln\left(1+\frac{M}{p-1}\right)=\sum_{p\le M}\left[\ln(p-1+M)-\ln p-\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)\right]$$

$$\le\pi(M)\cdot\ln(2M)-\sum_{p\le M}\ln p+\sum_{p\le M}\frac{1}{p}=\frac{M\cdot\ln(2M)}{\ln M}-M+O\left(\frac{M}{\ln M}\right)=O\left(\frac{M}{\ln M}\right)\qquad(4)$$

注意到 $M=\ln n$, 由 (3) 及 (4) 式立刻得到估计式

$$\sum_{S(k)\le M}1\ll\exp\left(\frac{c\cdot\ln n}{\ln\ln n}\right)\qquad(5)$$

其中 c 为一正常数.

注意到 $\exp\left(\frac{c\cdot\ln n}{\ln\ln n}\right)\ll\frac{n}{\ln n}$, 于是结合 (1), (2) 及 (5) 式立刻推出估计式

$$n-\mathrm{PS}(n)=1+\sum_{\substack{k\le n\\ S(k)=S(p^{\alpha}),\ \alpha\ge 2}}1=O\left(\frac{n}{\ln n}\right)$$

所以 $\mathrm{PS}(n)=n+O\left(\frac{n}{\ln n}\right)$.

参 考 文 献

[1] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions [M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Lu Yaming. On the solutions of an equation involving the Smarandache function [J]. Scientia Magna, 2006, 2(1): 76-79.

[3] 乐茂华. 关于 Smarandache 函数的一个猜想 [J]. 黑龙江大学学报: 自然科学版, 2007, 24(5): 687-688.

[4] 徐哲峰. 关于 Smarandache 函数的值分布 [J]. 数学学报, 2006, 49(5): 1009-1012.

[5] 杜凤英. 关于 Smarandache 函数 $S(n)$ 的一个猜想 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(2): 205-208.

[6] Le Maohua . Two function equations [J]. Smarandache Notions Journal, 2004, 14: 180-182.

[7] Tom M Apostol. Introduction to Analytic Number Theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

[8] 张文鹏. 初等数论 [M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2007.

On a problem of the Smarandache function

ZHANG Ai-ling

(Faculty of Higher Technical, Xi'an University of Technology, Xi'an 710082, China)

Abstract: For any positive integer n, the famous Smarandache function $S(n)$ is defined as the smallest positive integer m such that $n|m!$. That is, $S(n)=\min\{m:\ m\in\mathbb{N},\ n|m!\}$. Let $\mathrm{PS}(n)$ denotes the number of all n in the interval $[1,\ n]$ such that $S(n)$ be a prime. In an unpublished paper, J.Castillo asked us to determine the limit $\mathrm{PS}(n)/n$ as $n\longrightarrow\infty$, if this limit exists, find its value. In this paper, we using the elementary method to study this problem, and prove that its limit exists, and its value is 1.

Keywords: Smarandache function, prime, limit

2000MSC: 11B83