第 8卷 第 12期 2008年 6月
1671-1819(2008)12-3260-03

科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering

Vol. 8 No. 12 June 2008
© 2008 Sci. Tech. Engng.

关于 Smarandache可乘函数的一个猜测的两个结果

陈 斌
(西北大学 数学系, 西安 710069; 渭南师范学院 数学系, 渭南 714000)

摘 要 在 Smarandache函数的基础上,定义了一个新的可乘函数,利用初等数论的方法,通过猜测、归纳得出了其和函数一个猜测的两个重要的结论。

关键词 Smarandache 可乘函数 整数
中图法分类号 O156; 文献标志码 A

1 引言及主要结论

罗马尼亚著名的数论专家 Smarandache教授在他所著的《Only Problems, Not solutions》一书中,定义了一个名为 Smarandache的函数 $S(n)$,即对于任意的正整数 n, F. Smarandache函数 $S(n)$的定义为最小的正整数 m,使得或者为 $n \mid m!$ 关于 $S(n)$的算术性质,有不少学者进行过研究,获得了不少有重要理论价值的研究成果。

例如王永兴在文献[1]中研究了 $S(n)$的均值性质,给出了该函数一个较强的均值计算公式:

$$\sum_{n\leqslant x} S(n) = \frac{\pi^2}{12}\frac{x^2}{\ln x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right)。$$

Jozsef Sandor在文献[2]中研究了对于任意的正整数 $k \geqslant 2$,存在无限多组正整数 $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ 使得下列不等式成立:$S(m_1 + m_2 + \cdots + m_k) > S(m_1) + S(m_2) + \cdots + S(m_k)$。且同时存在无限多组正整数 $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ 使得下列不等式成立:$S(m_1 + m_2 + \cdots + m_k) < S(m_1) + S(m_2) + \cdots + S(m_k)$。

Lu Yaming在文献[3]中进一步研究了一个关于 $S(n)$的方程的解的存在性问题,得出了对于任意的正整数 $k \geqslant 2$,方程

$$S(m_1 + m_2 + \cdots + m_k) = S(m_1) + S(m_2) + \cdots + S(m_k)$$

有无穷多组正整数解 $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$。

同时他又引入了一类新的可乘函数,被称之为 Smarandache可乘函数,其定义为: $f(1) = 1$,对于任意的整数 n,若 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$ 为 n的标准分解式,则有 $f(n) = \max\{f(p_1^{\alpha_1}), f(p_2^{\alpha_2}), \ldots, f(p_s^{\alpha_s})\}$。

现在我们取函数: $f(p^\alpha) = \alpha p$,显然这是一个新的 Smarandache可乘函数,并取其和函数,记为

$$Smd(n) = \sum_{d \mid n} \frac{1}{f(d)}。$$

在大量研究的基础上,我们发现这一个新的可乘函数及其和函数其具有如下规律:

$$f(1) = 1, \quad Smd(1) = \sum_{d \mid 1} \frac{1}{f(d)} = 1。$$

$$f(2) = 2, \quad Smd(2) = \sum_{d \mid 2} \frac{1}{f(d)} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}。$$

………

$f(24) = f(2^3 \times 3) = f(2^3) = 6$, $Smd(24) =$

2008年 1月 11日收到 国家自然科学基金项目(10971023)、陕西省教育厅基金项目(07JK243)、渭南师范学院基金项目(08YKS023)资助
作者简介:陈斌,男(1979—)陕西省咸阳人,西北大学硕士,渭南师范学院讲师。

$$\sum_{d|24}\frac{1}{f(d)}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=3。$$

$f(25)=f(5^2)=10$, $Smd(25)=\sum_{d|25}\frac{1}{f(d)}=1+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{13}{10}$。

……

通过以上数值计算,我们猜测:当 $n>1$且 $n\neq 24$时,有 $Smd(n)$不可能为整数. 于是我们提出下面的猜测 设 n为任意正整数,则 $Smd(n)=\sum_{d|n}\frac{1}{f(d)}$为整数当且仅当 $n=1, 24$。

对于我们取的这个新可称函数这一猜测,虽然目前我们还不能证实它的正确性,但是我们对它的正确性是深信不疑的!我们可以给出一些结论有助于说明这一猜测的正确性,具体地说也就是证明了下面的几个结论

定理 1 当 $n=p$, p为素数时, $Smd(n)$不是正整数。

定理 2 对于任意素数 p及正整数 α,当 $n=p^\alpha$时, $Smd(n)$不是正整数。

2 定理的证明

为了证明定理,我们首先引入以下

引理 对于任意的正整数 $n\geq 2$,有 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{n}$不是正整数。

证明:令 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{n}=S$,由此和数的结构特点,可构造一个整数 M,使 MS不是正整数,从而证明 S不是正整数。

由 $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}$,取 $M=2^{k-1}\times 3\times 5\times 7\cdots p$,这里 k是使 $2^k\leqslant n$最大整数, p是不大于 n的最大奇数。则在 $1, 2, 3, \cdots, n$中必存在一个 $n_0=2^k$,使得

$$MS=M+\frac{M}{2}+\frac{M}{3}+\cdots+\frac{M}{n_0}+\cdots+\frac{M}{n}。$$

由 $M=2^{k-1}\times 3\times 5\times 7\cdots p$知, $\frac{M}{2}, \frac{M}{3}, \cdots, \frac{M}{n}$必为整数,而 $\frac{M}{n_0}=\frac{3\times 5\times 7\cdots p}{2}$显然不是正整数,所以 MS不是整数,从而 S不是正整数。故 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{n}$不是正整数。

对于定理 1,由 Smarandache可乘函数的定义: $f(1)=1$,对于任意的整数 n,若 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$为 n的标准分解式,则有 $f(n)=\max\{f(p_1^{\alpha_1}), f(p_2^{\alpha_2}), \cdots, f(p_s^{\alpha_s})\}$。取 $f(p^\alpha)=\alpha p$,显然这是一个新的可乘函数,对于其和函数 $Smd(n)=\sum_{d|n}\frac{1}{f(d)}$,当 $n=p$, p为素数时,

由 $f(n)=f(p)=p$,则有

$$Smd(n)=Smd(p)=\sum_{d|p}\frac{1}{f(d)}=1+\frac{1}{p}=\frac{1+p}{p},$$

又对于任意的素数 $p\geqslant 2$有 $(p, p+1)=1$,

所以 $p\nmid p+1$,

故 $\frac{p+1}{p}$不是正整数,即可得 $Smd(n)$不是正整数。

完成了定理 1的证明。

对于定理 2,当 $n=p^\alpha$, $(\alpha>1)$, p为素数时,则由 $f(p^\alpha)=\alpha p$,有

$$Smd(n)=Smd(p^\alpha)=\sum_{d|p^\alpha}\frac{1}{f(d)}=$$

$$1+\frac{1}{f(p)}+\frac{1}{f(p^2)}+\cdots+\frac{1}{f(p^\alpha)}=$$

$$1+\frac{1}{p}+\frac{1}{2p}+\cdots+\frac{1}{\alpha p}=$$

$$1+\frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{\alpha}\right)。$$

而由引理 1可知,对于任意正整数 $\alpha>1$有 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{\alpha}$不是正整数。

所以 $Smd(n)=1+\frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$不是正整数.

完成了定理 2的证明。

(下转第 3274页)

3 史建红. 约束线性回归模型回归系数的条件岭型估计. 山西师范大学学报, 2001; 15(4): 10— 16

4 王松桂. 线性模型的理论及其应用. 合肥: 安徽教育出版社, 1987

General Liu Estimation and Its Oprimality

CHEN De-ying, ZHANG Shang-li*

(School of Science, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, P. R. China)

[Abstract] A kind of biased estimator-Liu estimator was proposed. A new biased estimator in linear model-general Liu estimator is considered. In the sense of mean square error matrix, some properties of the general Liu estimation are obtained.

[Key words] Liu estimation general Liu estimation mean square error matrix admissibility

(上接第 3261页)

参 考 文 献

1 Wang Yongxing. On the Smarandache function. Zhang Wenpeng, Li Junzhuang, Li Duansen. Research on Smarandache Pronblem In Number Theory II. Hexis, Phoenix AZ, 2005

2 Jsandor J. On certain inequalities involving The Smarandache function. Scientia Magna, 2006; 2(3): 78— 80

3 Liu Yaming. On the solutions of an equation involving the Smarandache function. Scientia Magna, 2006; 2(1): 76— 79

4 潘承洞, 潘承彪. 初等数论. 北京: 北京大学出版社, 1992

5 杨倩丽, 王 涛, 李海龙. Smarandache双阶乘函数性质的研究. 西安工程科技学院学报, 2006; (4): 36— 39

Two Results of a Guess on the Smarandache Multiplicative Function

CHEN Bin

(Department of Mathematics, Northwest University, xi' an 710069, P. R China;

Department of Mathematics, Weinan Teachers College, Weinan 714000, P. R China)

[Abstract] On the Smarandache function foundation, a new multiplicative function is defined. Uses the primary methods of the number theory. Through the guess the induction gets the function two important conclusions of the guess.

[Key Words] Smarandache multiplicative function integer