DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2011.01.010

第36卷 第1期 西南师范大学学报(自然科学版) 2011年2月
Vol. 36 No. 1 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Feb. 2011

文章编号:1000-5471(2011)01-0044-04

关于Smarandache和的均值

赵院娥

延安大学 数学与计算机学院,陕西 延安 716000

摘要:对任意正整数n及给定的整数$k>1$,利用高斯取整函数的性质及初等方法研究Smarandache和函数$S(n,k)$及$AS(n,k)$的均值性质,给出了两个有趣的渐近公式.

关 键 词:Smarandache和函数;均值;初等方法;渐近公式

中图分类号:O156.4 文献标志码:A

对任意正整数n及给定的整数$k>1$,M. Bencze曾定义了两个Smarandache和函数$S(n,k)$及$AS(n,k)$如下:

$$S(n,k)=\sum_{\substack{|n-ki|\leqslant n\\ i=0,1,2,\cdots}}(n-ik)$$

$$AS(n,k)=\sum_{\substack{|n-ki|\leqslant n\\ i=0,1,2,\cdots}}|n-ik|$$

例如

$$S(9,4)=9+(9-4)+(9-8)+(9-12)+(9-16)=5$$
$$S(11,5)=11+(11-5)+(11-10)+(11-15)+(11-20)=5$$
$$AS(9,4)=9+|9-4|+|9-8|+|9-12|+|9-16|=25$$
$$AS(11,5)=11+|11-5|+|11-10|+|11-15|+|11-20|=31$$

同时M. Bencze还建议人们研究函数$S(n,k)$及$AS(n,k)$的算术性质.关于这一问题,作者认为这两个函数是有意义的,至少可以反映出正整数n在k的倍数数列中的分布性质.此外,在数列$\{S(n,k)\}$中,正整数n和k满足什么条件时,$S(n,k)=0$?能否刻画出这类整数的特征?这些都是有意义的研究内容.有关Smarandache的各类问题,可参阅文献[1-5].而文中所涉及的高斯取整函数的性质,可参阅文献[6]及[7].本文的主要目的是利用初等方法以及高斯取整函数的性质研究函数$S(n,k)$及$AS(n,k)$的均值性质,给出两个有趣的均值公式.具体地说也就是证明下面两个结论:

定理1 设$k>1$为给定的整数,那么对任意整数$x>1$,我们有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}S(n,k)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{3+(-1)^k}{2k}\right)x^2+R(x,k)$$

其中$|R(x,k)|\leqslant\frac{7}{8}k^2+\frac{5k}{8}x$.

定理2 设$k>1$为给定的整数,那么对任意整数$x>1$,我们有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}AS(n,k)=\frac{1}{3k}x^3+\frac{1}{4}\left(1+\frac{7+(-1)^k}{2k}\right)x^2+R_1(x,k)$$

收稿日期:2010-03-03

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11071194).

作者简介:赵院娥(1972-),女,陕西延安人,副教授,硕士,主要从事数论研究.

其中 $|R_1(x,\ k)| \leqslant \frac{7}{8}k^2 + \frac{7}{8}kx + \frac{x}{6k} + \frac{x}{2}$.

定理 1 的证明　现在我们利用初等方法以及高斯取整函数的性质直接给出定理的证明. 首先我们用高斯取整函数将函数 $S(n,\ k)$ 进行简化，表示成更简单的形式. 注意到 $|n-ki| \leqslant n$ 当且仅当 $-n \leqslant n-ki \leqslant n$ 或者 $0 \leqslant i \leqslant \left[\frac{2n}{k}\right]$，其中 $[x]$ 为高斯取整函数，即 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数. 于是函数 $S(n,\ k)$ 可表示为：

$$\begin{aligned}
S(n,\ k) = &\sum_{\substack{|n-ki| \leqslant n \\ i=0,1,2,\cdots}} (n-ik) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{2n}{k}\right]} (n-ki) = n + n\cdot\left[\frac{2n}{k}\right] - \frac{k}{2}\left[\frac{2n}{k}\right]\left(\left[\frac{2n}{k}\right]+1\right) = \\
&\frac{2n^2}{k} + n - n\left\{\frac{2n}{k}\right\} - \frac{k}{2}\left(\frac{4n^2}{k} - \frac{4n}{k}\left\{\frac{2n}{k}\right\} + \left\{\frac{2n}{k}\right\}^2 + \frac{2n}{k} - \left\{\frac{2n}{k}\right\}\right) = \\
&n\left\{\frac{2n}{k}\right\} - \frac{k}{2}\left(\left\{\frac{2n}{k}\right\}^2 - \left\{\frac{2n}{k}\right\}\right)
\end{aligned} \tag{1}$$

其中 $\{x\} = x - [x]$ 表示 x 的分数部分，$0 \leqslant \{x\} < 1$.

现在对任意整数 $x > 1$，设 $x = k\left[\frac{x}{k}\right] + r$，这里 $0 \leqslant r < k$. 于是对(1)式求和可得

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leqslant k\left[\frac{x}{k}\right]} S(n,\ k) = &\sum_{n \leqslant k\left[\frac{x}{k}\right]} \left(n\left\{\frac{2n}{k}\right\} - \frac{k}{2}\left(\left\{\frac{2n}{k}\right\}^2 - \left\{\frac{2n}{k}\right\}\right)\right) = \\
&\sum_{i=1}^{\left[\frac{x}{k}\right]} \sum_{(i-1)k < n \leqslant ik} \left(n\left\{\frac{2n}{k}\right\} - \frac{k}{2}\left(\left\{\frac{2n}{k}\right\}^2 - \left\{\frac{2n}{k}\right\}\right)\right) = \\
&\sum_{i=1}^{\left[\frac{x}{k}\right]} \sum_{1 \leqslant n \leqslant k} \left((n+(i-1)k)\left\{\frac{2n}{k}\right\} - \frac{k}{2}\left(\left\{\frac{2n}{k}\right\}^2 - \left\{\frac{2n}{k}\right\}\right)\right) = \\
&\sum_{i=1}^{\left[\frac{x}{k}\right]} \sum_{1 \leqslant n < \frac{k}{2}} \left((n+(i-1)k)\frac{2n}{k} - \frac{k}{2}\left(\frac{4n^2}{k^2} - \frac{2n}{k}\right)\right) + \\
&\sum_{i=1}^{\left[\frac{x}{k}\right]} \sum_{\frac{k}{2} < n < k} \left((n+(i-1)k)\frac{2n-k}{k} - \frac{k}{2}\left(\frac{(2n-k)^2}{k^2} - \frac{2n-k}{k}\right)\right) = \\
&\sum_{i=1}^{\left[\frac{x}{k}\right]} \sum_{1 \leqslant n < k} \left((n+(i-1)k)\frac{2n}{k} - \frac{k}{2}\left(\frac{4n^2}{k^2} - \frac{2n}{k}\right)\right) - \sum_{i=1}^{\left[\frac{x}{k}\right]} \sum_{\frac{k}{2} \leqslant n < k} (ik - n) = \\
&\sum_{i=1}^{\left[\frac{x}{k}\right]} \frac{k(k-1)}{2}(2i-1) - \frac{k}{2}\left[\frac{x}{k}\right]\left(\left[\frac{x}{k}\right]+1\right)\sum_{\frac{k}{2} \leqslant n < k} 1 + \left[\frac{x}{k}\right]\sum_{\frac{k}{2} \leqslant n < k} n = \\
&\frac{k(k-1)}{2}\left[\frac{x}{k}\right]^2 - \frac{k}{2}\left[\frac{x}{k}\right]^2 \sum_{\frac{k}{2} \leqslant n < k} 1 - \frac{k}{2}\left[\frac{x}{k}\right] \sum_{\frac{k}{2} \leqslant n < k} 1 + \left[\frac{x}{k}\right] \sum_{\frac{k}{2} \leqslant n < k} n
\end{aligned} \tag{2}$$

于是由(2)式知，当 $2 \mid k$ 时有恒等式

$$\sum_{n \leqslant k\left[\frac{x}{k}\right]} S(n,\ k) = \frac{k^2-2k}{4}\left[\frac{x}{k}\right]^2 + \frac{k^2-2k}{8}\left[\frac{x}{k}\right] \tag{3}$$

当 k 为奇数时有恒等式

$$\sum_{n \leqslant k\left[\frac{x}{k}\right]} S(n,\ k) = \frac{k^2-k}{4}\left[\frac{x}{k}\right]^2 + \frac{(k-1)^2}{8}\left[\frac{x}{k}\right] \tag{4}$$

而当 $0 \leqslant r \leqslant k-1$ 时有

$$0\leqslant\sum_{k\left[\frac{x}{k}\right]<n\leqslant k\left[\frac{x}{k}\right]+r}S(n,k)=\sum_{1\leqslant n\leqslant r}\left(\left(n+k\left[\frac{x}{k}\right]\right)\left\{\frac{2n}{k}\right\}-\frac{k}{2}\left(\left\{\frac{2n}{k}\right\}^2-\left\{\frac{2n}{k}\right\}\right)\right)=$$
$$\sum_{1\leqslant n\leqslant r}\left(\left(n+k\left[\frac{x}{k}\right]\right)\left\{\frac{2n}{k}\right\}+\frac{k}{8}-\frac{k}{2}\left(\left\{\frac{2n}{k}\right\}-\frac{1}{2}\right)^2\right)\leqslant \tag{5}$$
$$\frac{5k^2}{8}+\frac{k}{2}x$$

注意到

$$\left[\frac{x}{k}\right]^2=\frac{x^2}{k^2}-\frac{2x}{k}\left\{\frac{x}{k}\right\}+\left\{\frac{x}{k}\right\}^2$$

结合公式(2),(3)及(5),我们立刻得到当 k 为偶数时有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}S(n,k)=\sum_{n\leqslant k\left[\frac{x}{k}\right]}S(n,k)+\sum_{k\left[\frac{x}{k}\right]<n\leqslant k\left[\frac{x}{k}\right]+r}S(n,k)=$$
$$\frac{1}{4}\left(1-\frac{2}{k}\right)x^2+R(x,k)$$

其中 $|R(x,k)|\leqslant\frac{7}{8}k^2+\frac{5k}{8}x$.

结合公式(2),(4)及(5)可知,当 k 为奇数时有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}S(n,k)=\sum_{n\leqslant k\left[\frac{x}{k}\right]}S(n,k)+\sum_{k\left[\frac{x}{k}\right]<n\leqslant k\left[\frac{x}{k}\right]+r}S(n,k)=$$
$$\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{k}\right)x^2+R(x,k)$$

其中 $|R(x,k)|\leqslant\frac{7}{8}k^2+\frac{5k}{8}x$. 于是证明了定理 1.

定理 **2** 的证明　由前面计算 $S(n,k)$ 的证明方法我们有

$$AS(n,k)=\sum_{\substack{|n-ki|\leqslant n\\ i=0,1,2,\cdots}}|n-ik|=\sum_{i=0}^{\left[\frac{2n}{k}\right]}|n-ki|=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{k}\right]}|n-ki|+\sum_{i=\left[\frac{n}{k}\right]+1}^{\left[\frac{2n}{k}\right]}|n-ki|=$$
$$n+n\left[\frac{n}{k}\right]-\frac{k}{2}\left[\frac{n}{k}\right]\left(\left[\frac{n}{k}\right]+1\right)-n\left(\left[\frac{2n}{k}\right]-\left[\frac{n}{k}\right]\right)+ \tag{6}$$
$$\frac{k}{2}\left[\frac{2n}{k}\right]\left(\left[\frac{2n}{k}\right]+1\right)-\frac{k}{2}\left[\frac{n}{k}\right]\left(\left[\frac{n}{k}\right]+1\right)=$$
$$\frac{n^2}{k}+n-n\left\{\frac{2n}{k}\right\}-k\left\{\frac{n}{k}\right\}^2+k\left\{\frac{n}{k}\right\}+\frac{k}{2}\left\{\frac{2n}{k}\right\}^2-\frac{k}{2}\left\{\frac{2n}{k}\right\}$$

所以由定理 1 的结论可得

$$\sum_{n\leqslant x}AS(n,k)=\sum_{n\leqslant x}\left(\frac{n^2}{k}+n-n\left\{\frac{2n}{k}\right\}-k\left\{\frac{n}{k}\right\}^2+k\left\{\frac{n}{k}\right\}+\frac{k}{2}\left\{\frac{2n}{k}\right\}^2-\frac{k}{2}\left\{\frac{2n}{k}\right\}\right)=$$
$$\sum_{n\leqslant x}\left(\frac{n^2}{k}+n\right)-\sum_{n\leqslant x}\left(n\left\{\frac{2n}{k}\right\}-\frac{k}{2}\left\{\frac{2n}{k}\right\}^2+\frac{k}{2}\left\{\frac{2n}{k}\right\}\right)- \tag{7}$$
$$\sum_{n\leqslant x}\left(k\left\{\frac{n}{k}\right\}^2-k\left\{\frac{n}{k}\right\}\right)$$

注意到估计式

$$0\leqslant-k\left\{\frac{n}{k}\right\}^2+k\left\{\frac{n}{k}\right\}\leqslant\frac{k}{4}$$

于是,由(7)式知,对任意正整数 x,当 $k>1$ 为整数时有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}AS(n,k)=\frac{1}{3k}x^3+\frac{1}{4}\left(1+\frac{7+(-1)^k}{2k}\right)x^2+R_1(x,k)$$

其中 $|R_1(x, k)| \leqslant \frac{7}{8}k^2 + \frac{7}{8}kx + \frac{x}{6k} + \frac{x}{2}$. 于是完成了定理 2 的证明.

致谢：作者对审稿人提出的宝贵意见和建议表示衷心的感谢！

参考文献：

[1] SMARANDACHE F. Only Problems, Not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.
[2] SMARANDACHE F. Sequences of Numbers Involved Unsolved Problems[M]. PHoenix: Hexis, 2006.
[3] BALACENOIU I, SELEACU V. History of the Smarandache Function[J]. Smarandache Notions Journal, 1999, 10(1-2-3): 192-201.
[4] PEREZ M L. Florentin Smarandache Definitions, Solved and Unsolved Problems, Conjectures and Theorems in Number Theory and Geometry[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 2000.
[5] KENICHIRO KASHIHARA. Comments and Topics on Smarandache Notions and Problems[M]. New Mexico: Erhus University Press, 1996.
[6] APOSTOL T M. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1976.
[7] 张文鹏. 初等数论[M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2007.

On the Mean Value of the Smarandache Summands

ZHAO Yuan-e

College of Mathematics and Computer Science, Yanan University, Yan'an Shaanxi 716000, China

Abstract: For any positive integer n and any fixed integer $k > 1$, M. Bencze defined two Smarandache Summands functions $S(n, k)$ and $AS(n, k)$. Then he asked us to study the arithmetical properties of these two functions. The main purpose of this paper is using the properties of the Gauss function and the elementary method to study the mean value properties of $S(n, k)$ and $AS(n, k)$, and give two interesting asymptotic formulae for them.

Key words: Smarandache summands function; mean value; elementary method; asymptotic formula

责任编辑　覃吉康