第 32 卷 第 2 期 延安大学学报(自然科学版) Vol. 32 No. 2
2013 年 6 月 Journal of Yanan University(Natural Science Edition) Jun. 2013
DOI: 10.3969/J. ISSN. 1004 - 602X. 2013. 02. 014

关于 Smarandache 复合函数的均值分布

董海浪,赵西卿,李 波

(延安大学 数学与计算机科学学院,陕西 延安 716000)

摘 要: 利用初等解析的方法研究了复合函数 $S(W(n))$ 的均值分布,并给出了一个较强的渐近公式。

关键词: Smarandache 函数; 复合函数; 均值; 渐近公式

中图分类号: O156. 4 **文献标识码:** A **文章编号:** 1004 - 602X(2013)02 - 0014 - 02

1 引言及结论

美籍罗马尼亚著名的数论专家 Smarandache 教授在文献[1]中提出 Smarandache 函数 $S(n)$,定义为有最小的正整数 m,使得 $n \mid m!$,即 $S(n) = \min\{m: m \in N, n \mid m!\}$。例如,$S(1) = 1$,$S(2) = 2$,$S(3) = 3$,$S(4) = 4$,$S(5) = 5$,$S(6) = 3$,$S(7) = 7$,$S(8) = 4$,$S(9) = 6$,$S(10) = 5$,…。对于任意正整数 $n > 1$,如果 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$ 是 n 的标准素因数分解式,可以推出 $S(n)$ 满足

$$S(n) = \max_{1 \leqslant i \leqslant s}\{S(p_i^{\alpha_i})\}, \tag{1}$$

Mark 在文[2]中得到了 $S(p^\alpha)$ 的上下界估计,即

$$(p-1)\alpha \leqslant S(p^\alpha) \leqslant (p-1)\alpha[\alpha + 1 + \log_p^\alpha] + 1, \tag{2}$$

文献[3]探讨了 $S(n)$ 的均值分布问题,并获得了一个较为精准的均值分布的估计式

$$\sum_{n \leqslant x} S(n) = \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{x^2}{1\mathrm{n}x} + O\left[\frac{x^2}{1\mathrm{n}^2 x}\right]。$$

定义一个新的数论函数 $W(n)$ 为:对任意的正整数 n,k 为最小的使得 $n \leqslant k(3k+1)$ 的正整数,即 $W(n) = \min\{k: n \leqslant k(3k+1), k \in N\}$。本章主要讨论复合函数 $S(W(n))$ 的均值分布性质。

定理 令 $x \geqslant 2$ 为任意实数,$k \geqslant 2$ 为给定的整数,则有

$$\sum_{n \leqslant x} S(W(n)) = \frac{\pi^2}{486} \cdot \frac{(3x)^{\frac{3}{2}}}{1\mathrm{n}\sqrt{x}} + \sum_{i=2}^{k} \frac{b_i \cdot (3x)^{\frac{3}{2}}}{1\mathrm{n}^i \sqrt{3x}} + O\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1\mathrm{n}^{k+1} x}\right],$$

其中 $b_i(i = 2, 3, \cdots, k)$ 为可计算的常数。

推论 令 $x \geqslant 2$ 为任意实数,有

$$\sum_{n \leqslant x} S(W(n)) = \frac{\pi^2}{486} \cdot \frac{(3x)^{\frac{3}{2}}}{1\mathrm{n}\sqrt{3x}} + + O\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1\mathrm{n}^2 x}\right]。$$

2 引理及其证明

引理 令 $x \geqslant 2$ 为任意实数,设 p 为素数,则有

$$\sum_{p \leqslant x} p^2 = \frac{x^3}{3 1\mathrm{n}x} + \sum_{i=2}^{k} \frac{a_i x^3}{1\mathrm{n}^i x} + O\left(\frac{x^3}{1\mathrm{n}^{k+1} x}\right)。$$

证明 结合公式 $\pi(x) = \frac{x}{1\mathrm{n}x} + \sum_{i=2}^{k} \frac{a_i x}{1\mathrm{n}^i x} + O\left(\frac{x}{1\mathrm{n}^{k+1} x}\right)$ 并利用 Abel 求和公式可得 $\sum_{p \leqslant x} p^2 = \frac{x^3}{1\mathrm{n}x} +$

$$\sum_{p \leqslant x} p^2 = \frac{x^3}{1\mathrm{n}x} + \sum_{i=2}^{k} \frac{a_j x^3}{1\mathrm{n}^i x} + O\left(\frac{x^3}{1\mathrm{n}^{k+1} x}\right) - \left(2\int_2^x \frac{t^2}{1\mathrm{n}t} dt + 2\int_2^x \sum_{i=2}^{k} \frac{a_i x^2}{1\mathrm{n}^i x} dt + O\left(\int_2^x \frac{t^2}{1\mathrm{n}^{k+1} t} dt\right)\right) = \frac{x^3}{3 1\mathrm{n}x} + \sum_{i=2}^{k} \frac{a_i x^3}{1\mathrm{n}^i x} + O\left(\frac{x^3}{1\mathrm{n}^{k+1} x}\right),$$

于是引理证毕。

收稿日期: 2013-04-28

基金项目: 基金项目: 陕西省教育厅专项科研计划项目(11JK0489)

作者简介: 董海浪(1985—)男,陕西延川人,延安大学在读硕士研究生。

3 定理的证明

在这里，用初等及解析方法来给出定理的证明。在公式 $\sum\limits_{n\le x} S(W(n))$ (3)

中，注意到若 $W(n)=m$，则当 $k(3k+1)\le n\le (k+1)(3k+4)$ 时，都有 $W(n)=m$。也就是说方程 $W(n)=m$ 有 $6m+4$ 个解 $n=m(3m+1)+1, m(3m+1)+2, \cdots, (m+1)(3m+4)$。因为 $n\le x$，所以当 $W(n)=m$ 时，m 满足 $1\le m\le \frac{\sqrt{12x+1}-1}{6}$，亦即 $m=\frac{\sqrt{3x}}{3}+O(1)$，由于 $S(n)\le n$，所以

$$\sum_{n\le x} S(W(n)) = \sum_{n\le x, W(n)=m} S(m) = \sum_{m\le \frac{\sqrt{12x+1}-1}{6}} mS(m)+O(x) = \sum_{m\le \frac{\sqrt{3x}}{3}} mS(m)+O(x)。$$

把 $\left[1, \frac{\sqrt{3x}}{3}\right]$ 这个区间里的所有正整数分成 M 和 N 两个集合，这里令集合 M 为：存在素数使得 $p \mid n$ 并且 $p>\sqrt{n}$ 的所有正整数 m 的集合；集合 N 定义为：在 $\left[1, \frac{\sqrt{3x}}{3}\right]$ 区间中所有不属于集合 M 的正整数 m 的集合。结合性质(1)，可得

$$\sum_{m\le \frac{\sqrt{3x}}{3}} m\cdot S(m) = \sum_{m\in M} m\cdot S(m) + \sum_{m\in N} m\cdot S(m)。$$

分析集合 M 中的情况，得

$$\begin{aligned}\sum_{m\in A} m\cdot S(m) &= \sum_{\substack{m\in M\\ p/m, p>\sqrt{m}}} m\cdot S(m) \\ &= \sum_{\substack{mp\le \frac{\sqrt{3x}}{3}\\ m<p}} mp\cdot S(mp) = \sum_{\substack{mp\le \frac{\sqrt{3x}}{3}\\ m<p}} mp\cdot p \\ &= \sum_{m\le \sqrt[4]{\frac{x}{3}}} m\cdot \sum_{m<p\le \frac{\sqrt{3x}}{3m}} p^2 \end{aligned} \quad (4)$$

根据引理，有

$$\begin{aligned}\sum_{m<p\le \frac{\sqrt{3x}}{3m}} p^2 &= \pi\left(\frac{\sqrt{3x}}{3m}\right)\left(\frac{\sqrt{3x}}{3m}\right)^2 - \pi(m)\cdot m^2 - \int_m^{\frac{\sqrt{3x}}{3m}} 2t\pi(t)\,dt \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{(\sqrt{3x})^3}{(3m)^3 \ln\sqrt{3x}} + \sum_{i=2}^{k}\frac{a_i(\sqrt{3x})^3\cdot \ln^i m}{m^3\ln^i\sqrt{3x}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^3\ln^{k+1}x}\right) \\ &= \frac{1}{81}\cdot\frac{(3x)^{\frac{3}{2}}}{m^3\ln\sqrt{3x}} + \sum_{i=2}^{k}\frac{a_i(3x)^{\frac{3}{2}}\cdot \ln^i m}{m^3\ln^i\sqrt{3x}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^3\ln^{k+1}x}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

其中，$a_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数。

结合(4)，(5)式以及公式 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}=\frac{\pi^2}{6}$ 得

$$\begin{aligned}\sum_{m\in M}\cdot S(m) &= \frac{1}{81}\cdot\frac{(3x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{3x}}\cdot\sum_{m\le\sqrt[4]{\frac{x}{3}}}\frac{1}{m^2} + \sum_{m\le\sqrt[4]{\frac{x}{3}}}\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i(3x)^{\frac{3}{2}}\cdot\ln^i m}{m^2\ln^i\sqrt{3x}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right) \\ &= \frac{\pi^2}{486}\cdot\frac{(3x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{3x}} + \sum_{i=2}^{k}\frac{b_i(3x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{3x}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right) \end{aligned} \quad (6)$$

其中，$b_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数。

集合 N 中的情形讨论如下。首先，结合集合的定义以及(1)、(2)式，我们可以推出，对任意的正整数 $m\in N$，如果 m 的标准素因数分解式是 $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots, p_s^{\alpha_s}$，则有

$$S(n)=\max_{1\le i\le s}\{S(p_i^{\alpha_i})\}\le \max_{1\le i\le s}\{\alpha_i\cdot p_i\}\le\sqrt{m}\ln m, \quad (7)$$

由(7)式可得

$$\sum_{m\in N} m\cdot S(m)\le\sum_{m\in N} m\cdot\sqrt{m}\ln m\le \sum_{m\le\frac{\sqrt{3x}}{3}} m^{\frac{3}{2}}\ln m\le x^{\frac{5}{4}}\ln x, \quad (8)$$

根据集合 M、N 的定义并结合(6)，(8)式有

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x} S(W(n)) &= \sum_{m\le\frac{\sqrt{3x}}{3}} m\cdot S(m)+O(x) \\ &= \sum_{m\in M} m\cdot S(m)+\sum_{m\in N} m\cdot S(m)+O(x) \\ &= \frac{\pi^2}{486}\cdot\frac{(3x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{3x}} + \sum_{i=2}^{k}\frac{b_i(3x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{3x}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right), \end{aligned}$$

其中 $b_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数。

定理证明完毕。

将 $k=1$ 代入定理即可得推论。

参考文献：

[1] Smarandache F. Only problems, not solutions [M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Mark F, Patrick M. Bounding the Smaranache problems, function [J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13(1): 37-42.

[3] Wang Y X. Research On Smarandache problem in number theory [M]. Phoenix, USA: Hex is, 2005: 103-106.

[4] 潘承洞，潘承彪. 初等数论 [M]. 北京大学出版社，2003.

[责任编辑　贺小林]