DOI:10.13990/j.issn1001-3679.2008.01.002

第 26卷 第 1期
2008年 2月

江 西 科 学
JIANGXI SCIENCE

Vol.26 No.1
Feb. 2008

文章编号:1001-3679(2008)01-0009-02

关于一个数论函数的二次均值

赵 教 练[1,2]

(1.西北大学数学系,陕西 西安 710069;2.渭南师范学院数学系,陕西 渭南 714000)

摘要:推广了 n进制中非零数字倒数之和函数的均值公式,给出其二次均值 $A_2(N,n)$的计算公式。

关键词:n进制;数字倒数之和函数;均值

中图分类号:O156.4 文献标识码:A

On the Smarandache Function and its Mean Value

ZHAO Jiao-lian[1,2]

(1. Department of Mathematics, Northwest University, Shanxi Xi'an 710069 PRC;
2. Department of Mathematics, Weinan Teacher's University, Shanxi Weinan 714000 PRC)

Abstract: Extends and reforce relation of corollary obtain an mean value computing formula $A_2(N,n)$.

Key words: Base n; Function of digital square sum; Mean value

1 引言及结论

美国数论专家 Smarandache F在《Only Problems, Not Solutions》[1]一书中提出了初等数论及集合论中 105个未解决的问题,其中第 22个问题是研究十进制中数字之和数列的性质。文献[2,3]分别讨论了 n进制中数字函数均值的有关计算。在前面的工作中作者研究了 n进制中数字倒数和函数均值的计算,本文在此基础上讨论其二次均值的计算,并给出了一个计算公式 $A_2(N,n)$。为叙述方便,先引入如下定义:

定义 4[4]:设 $n(n\geq 2)$为一给定的正整数,对任一正整数 m,假定 m在 n进制中表示为:

$$m=a_1n^{k_1}+a_2n^{k_2}+\cdots+a_sn^{k_s}$$

其中,$1\leq a_i<n$,$i=1,2,\cdots,s$;$k_1>k_2>\cdots>k_s\geq 0$。

记 $a(m,n)=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_s}$,并令 $A_r(N,n)=\sum_{m<N}a^r(m,n)$,令 $\varphi_r(n)=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i^r}$。

本文的目的是给出 $r=2$时的精确计算公式,即 $A_2(N,n)$,在这一记号下,有下列定理。

定理 1:设 $N=a_1n^{k_1}+a_2n^{k_2}+\cdots+a_sn^{k_s}$,其中,$1\leq a_i<n$;$i=1,2,\cdots,s$;$k_1>k_2>\cdots>k_s\geq 0$

$$A_2(N,n)=\sum_{i=1}^{s}\{[2k_ia_i\varphi_1(n)[\varphi_1(k_i)\varphi_1(n)+\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{a_j}]-\varphi_1(k_i)a_i]/n+k_ia_i\varphi_2(n)+[2k_i\varphi_2(n)-1]\varphi_1(a_i)+n\varphi_2(a_i)+a_i(\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{a_j})^2\}n^{k_i-1}。$$

2 引理

为了完成定理的证明,需要引入下面的引理,有

引理 1[2]:$A_1(N,n)=\sum_{i=1}^{s}[a_ik_i\varphi(n)+n\varphi(\frac{1}{a_i})+na_i\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{a_j}]n^{k_i-1}$。

收稿日期:2007-10-30;修订日期:2007-11-22

作者简介:赵教练(1979-),男,陕西兴平人,教师,西北大学数学系在读硕士研究生。

基金项目:陕西省教育厅基金项目(07JK243);渭南师范学院基金项目(07YKS022)。

引理2. $A_2(n^k,n)=\{[2k(k-1)\varphi_1^2(n)-\varphi_1(k)]/n+k\varphi_2(n)\}n^{k-1}$ (1)

证明：当 k=1时，左边 $=A_2(n,n)=\sum_{m<n}a^2(m,n)=a^2(1,n)+a^2(2,n)+\cdots a^2(n-1,n)=1^2+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}=\varphi_2(n)$，右边 $=\varphi_2(n)$，左边=右边，故命题成立。

假设 k=p时命题成立，即

$$A_2(n^p,n)=\{[2p(p-1)\varphi_1^2(n)-\varphi_1(p)]/n+p\varphi_2(n)\}n^{p-1}$$

那么，当 k=p+1时

$$A_2(n^{p+1},n)=\sum_{m<n^{p+1}}a^2(m,n)=\sum_{m<n^p}a^2(m,n)+\sum_{n^p\le m<2n^p}a^2(m,n)+\cdots+\sum_{(n-1)n^p\le m<n^{p+1}}a^2(m,n)=\sum_{m<n^p}a^2(m,n)+\sum_{0\le m<n^p}a^2(m+n^p,n)+\cdots+\sum_{0\le m<n^p}a^2(m+(n-1)n^p,n)=\sum_{m<n^p}a^2(m,n)+\sum_{0\le m<n^p}[a(m,n)+1]^2+\cdots+\sum_{0\le m<n^p}[a(m,n)+\frac{1}{(n-1)}]^2=n\sum_{m<n^p}a^2(m,n)+2[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)}]\sum_{m<n^p}a(m,n)+[1^2+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}]n^p=nA_2(n^p,n)+2\varphi_1(n)A_1(n^p,n)+\varphi_2(n)n^p。$$

由假设与引理1得

$$A_2(n^{p+1},n)=n\{[2p(p-1)\varphi_1^2(n)-\varphi_1(p)]/n+p\varphi_2(n)\}n^{p-1}+2\varphi_1^2(n)pn^{p-1}+\varphi_2(n)n^p=\{[2p(p+1)\varphi_1^2(n)-\varphi_1(p+1)]/n+(p+1)\varphi_2(n)\}n^p$$

所以 k=p+1成立，命题成立。

故由数学归纳法得，原命题成立。

引理3. $A_2(an^k,n)=\{[2k(k-1)\varphi_1^2(n)-\varphi_1(k)]a/n+ka\varphi_2(n)+2k\varphi_1(a)\varphi_2(n)+n\varphi_2(a)\}n^{k-1}$，其中 a为自然数。

证明：

$$A_2(an^k,n)=\sum_{m<ank}a^2(m,n)=\sum_{m<nk}a^2(m,n)+\sum_{nk\le m<2nk}a^2(m,n)+\cdots+\sum_{(a-1)nk\le m<ank}a^2(m,n)=\sum_{m<nk}a^2(m,n)+\sum_{0\le m<nk}[a(m,n)+1]^2+\cdots+\sum_{0\le m<n^k}[a(m,n)+\frac{1}{(a-1)}]^2=a\sum_{m<n^p}a^2(m,n)+2[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{(a-1)}]\sum_{m<nk}a(m,n)+[1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(a-1)^2}]n^k=aA_2(n^k,n)+2\varphi_1(a)A_1(n^k,n)+\varphi_2(a)n^k$$

由式(1)和引理1得

$$A_2(an^k,n)=a\{[2k(k-1)\varphi_1^2(n)-\varphi_1(k)]/n+k\varphi_2(n)\}n^{k-1}+2\varphi_1(a)kn^{k-1}\varphi_1(n)+\varphi_2(a)n^k=\{[2k(k-1)\varphi_1^2(n)-\varphi_1(k)]a/n+ka\varphi_2(n)+2k\varphi_1(a)\varphi_2(n)+n\varphi_2(a)\}n^{k-1}。$$

3 定理的证明

有了以上引理，下面给出定理1的证明，事实上有

$$A_2(N,n)=\sum_{m<N}a^2(m,n)=\sum_{m<a_1n^{k_1}}a^2(m,n)+\sum_{a_1n^{k_1}\le m<a_1n^{k_1}+a_2n^{k_2}}a^2(m,n)+\cdots+\sum_{N-a_sn^{k_s}\le m<N}a^2(m,n)=\sum_{m<a_1n^{k_1}}a^2(m,n)+\sum_{0\le m<a_2n^{k_2}}[a(m,n)+\frac{1}{a_1}]^2+\cdots+\sum_{0\le m<a_sn^{k_s}}[a(m,n)+\sum_{i=1}^{s-1}\frac{1}{a_i}]^2=\sum_{i=1}^{s}A_2(a_in^{k_i})+\sum_{i=1}^{s}2(\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{a_j})A_1(a_in^{k_i})+\sum_{i=1}^{s}(\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{a_j})^2a_in^{k_i}$$

由引理1和引理3得

$$A_2(N,n)=\sum_{i=1}^{s}\{[2k_i(k_i-1)\varphi_1^2(n)-\varphi_1(k_i)]a_i/n+k_ia_i\varphi_2(n)+2k_i\varphi_1(a_i)\varphi_2(n)+n\varphi_2(a_i)\}n^{k_i-1}+\sum_{i=1}^{s}[2(\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{a_j})a_ik_i\varphi_1(n)n^{k_i-1}+\varphi_1(a_i)+a_i(\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{a_j})^2]n^{k_i}=\sum_{i=1}^{s}\{[2k_ia_i\varphi_1(n)[\varphi_1(k_i)\varphi_1(n)+\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{a_j}]-\varphi_1(k_i)a_i]/n+k_ia_i\varphi_2(n)+[2k_i\varphi_2(n)-1]\varphi_1(a_i)+n\varphi_2(a_i)+a_i(\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{a_j})^2\}n^{k_i-1}$$

定理得证。

参考文献：

[1] Smarandache F. Only Problems, Not Solution[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] 李海龙，杨倩丽．关于 n进制及其有关计数函数[J]．纯粹数学与应用数学，2002，18(3)：13－15.

[3] 杨倩丽，李海龙．关于 n进制数字之和函数均值的计算[J]．西北大学学报，2002，32(4)：361－362.

[4] 潘承洞，潘承彪．初等数论[M]．北京：北京大学出版社，1998.

[5] 杨倩丽．一个数论函数的三次均值的俄计算[J]．纺织高校基础科学学报，2002，15(1)：47－48.