关于一类 F. Smarandache可乘函数的均值[20]

任治斌

(渭南师范学院数学系,渭南　714000)

摘　要: 主要目的是利用解析方法研究一类 F. Smarandache可乘函数的渐近性质,并给出关于这个函数的一个有趣的渐近公式.

关 键 词: F. Smarandache可乘函数; k-full数; 渐近公式

中图分类号: O156.4　文献标识码: A　文章编号: 1008-5513(2005)03-0217-04

1 引言及结论

设 m,n为满足条件 $(m,n)=1$的任意正整数,则著名的 F. Smarandache可乘函数定义为 $g(mn)=\max\{g(m),g(n)\}$.在文 [1]中,英国著名数论专家 T. Sabin教授首次提出了这一函数,并指出一些著名的数论函数如 Erdös函数, Smarandache函数等都是一类特殊的 F. Smarandache可乘函数! 进一步的,他定义了一类新的 F. Smarandache可乘函数如下:

$$f(1)=0,\ (m,n)=1 \Rightarrow f(mn)=\min\{f(m),f(n)\}$$

不难知道,如果 n的标准分解式为 $n=p_1^{T_1}p_2^{T_2}\cdots p_r^{T_r}$,则有 $f(n)=\min\{f(p_1^{T_1}),\cdots,f(p_r^{T_r})\}$.特别的我们取 $f(p^{T})=\min(T,p\}$.本文的主要目的是利用解析方法研究这类函数的渐近性质,并得到了一个有趣的渐近公式,即就是证明了下面的

定理　对于任意实数 $x\geqslant 1$,我们有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x} f(n) = x + \frac{12x^{\frac{1}{2}}}{\pi^2}\prod_p\left(1+\frac{1}{(p+1)(p^{\frac{1}{2}}-1)}\right) + \frac{18x^{\frac{1}{3}}}{\pi^2}\prod_p\left(1+\frac{1}{(p+1)(p^{\frac{1}{3}}-1)}\right) + O(x^{\frac{1}{4}+X})$$

其中$\prod_p$ 表示对所有素数求积, X为任意给定的正数.

2 一个简单引理

[20]收稿日期: 2005-01-04.
基金项目: 国家自然科学基金(10271093, 60472068),陕西省自然科学基金(2004A09)资助.
作者简介: 任治斌(1968-),讲师,研究方向:计算机网络及计算数论.

为了完成定理的证明,我们首先需要证明下面的一个简单引理.

引理 设 A_k 表示所有 k-full数(若对于任意素数 $p|n$ 都有 $p^k|n$,则称 n 为一个 k-full数)组成的集合,则对于任意实数 $x\geqslant 1$,我们有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A_k}} 1=\frac{6k\cdot x^{\frac{1}{k}}}{\pi^2}\prod_p\left(1+\frac{1}{(p+1)(p^{\frac{1}{k}}-1)}\right)+O(x^{\frac{1}{2k}+\varepsilon})$$

证明 为了方便起见,我们定义如下特征函数为

$$a(n)=\begin{cases}1,\text{若 } n=1\text{或者 } n\text{为一个 } k\text{-full数};\\ 0,\text{其它}.\end{cases}$$

则不难有

$$\sum_{\substack{n\in A_k\\ n\leqslant x}} 1=\sum_{n\leqslant x} a(n)$$

令

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s}$$

可知当 s 的实部较大时,级数 $f(s)$ 绝对收敛.从而由 Eurler积公式[4]知

$$\begin{aligned}f(s)&=\prod_p\left(1+\frac{a(p^k)}{p^{ks}}+\frac{a(p^{k+1})}{p^{(k+1)s}}+\cdots\right)\\&=\prod_p\left(1+\frac{1}{p^{ks}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\right)\\&=\prod_p\left(1+\frac{1}{p^{ks}}\right)\prod_p\left(1+\frac{1}{(p^{ks}+1)(p^s-1)}\right)\\&=\frac{\zeta(ks)}{\zeta(2ks)}\prod_p\left(1+\frac{1}{(p^{ks}+1)(p^s-1)}\right)\end{aligned}$$

其中 $\zeta(s)$ 为 Riemann-zeta函数.很明显的,我们有不等式

$$|a(n)|\leqslant n,\quad\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^{\sigma}}\right|<\frac{1}{\sigma-\frac{1}{k}}$$

其中 $\sigma>3$ 为 s 的实部,则由 Perron公式[5],有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\frac{a(n)}{n^{s_0}}=&\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}f(s+s_0)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O\left(\frac{x^bB(b+\sigma_0)}{T}\right)\\&+O\left(x^{1-\sigma_0}H(2x)\min\left(1,\frac{\log x}{T}\right)\right)+O\left(x^{-\sigma_0}H(N)\min\left(1,\frac{x}{T\|x\|}\right)\right)\end{aligned}$$

其中 N 为离 x 最近的整数,当 x 为半奇数时取 $N=x-\frac{1}{2}$,$\|x\|=|x-N|$.在上式中取 $s_0=0$,$b=1+\frac{1}{k}$,$T=1+x^{\frac{1}{2k}}$,$H(x)=x$,$B(\sigma)=\frac{1}{\sigma-\frac{1}{k}}$,则有

$$\sum_{n\leqslant x}a(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{1+\frac{1}{k}-iT}^{1+\frac{1}{k}+iT}\frac{\zeta(ks)}{\zeta(2ks)}R(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O(x^{\frac{1}{2k}+\varepsilon})$$

其中

$$R(s)=\prod_p\left(1+\frac{1}{(p^{ks}+1)(p^s-1)}\right)$$

现在来估计主项

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{1+\frac{1}{k}-iT}^{1+\frac{1}{k}+iT}\frac{\zeta(ks)x^s}{\zeta(2ks)s}R(s)\,ds$$

将积分线从 $s=1+\frac{1}{k}\pm iT$ 移到 $s=\frac{1}{2k}\pm iT$. 考虑到函数

$$f(s)=\frac{\zeta(ks)x^s}{\zeta(2ks)s}R(s)$$

在 $s=\frac{1}{k}$ 处有一个一阶极点,留数为 $\frac{kx^{\frac{1}{k}}}{\zeta(2)}R(\frac{1}{k})$. 即

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{1+\frac{1}{k}-iT}^{1+\frac{1}{k}+iT}+\int_{1+\frac{1}{k}+iT}^{\frac{1}{2k}+iT}+\int_{\frac{1}{2k}+iT}^{\frac{1}{2k}-iT}+\int_{\frac{1}{2k}-iT}^{1+\frac{1}{k}-iT}\right)\frac{\zeta(ks)x^s}{\zeta(2ks)s}R(s)\,ds$$

$$=\frac{k\cdot x^{\frac{1}{k}}}{\zeta(2)}\prod_p\left(1+\frac{1}{(p+1)(p^{\frac{1}{k}}-1)}\right)$$

容易估计

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{1+\frac{1}{k}+iT}^{\frac{1}{2k}+iT}+\int_{\frac{1}{2k}-iT}^{1+\frac{1}{k}-iT}\right)\frac{\zeta(ks)x^s}{\zeta(2ks)s}R(s)\,ds\right|$$

$$\ll\int_{\frac{1}{2k}}^{1+\frac{1}{k}}\left|\frac{\zeta(k(\sigma+iT))}{\zeta(2k(\sigma+iT))}R(s)\frac{x^{1+\frac{1}{k}}}{T}\right|d\sigma\ll\frac{x^{1+\frac{1}{k}}}{T}=x^{\frac{1}{2k}}$$

再利用分部积分法便可得到如下估计

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2k}+iT}^{\frac{1}{2k}-iT}\frac{\zeta(ks)x^s}{\zeta(2ks)s}R(s)\,ds\right|\ll\int_0^T\left|\frac{\zeta(1/2+ikt)}{\zeta(1+2ikt)}\frac{x^{\frac{1}{2k}}}{t}\right|dt\ll x^{\frac{1}{2k}+\varepsilon}$$

注意到 $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$,由上述估计可得

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A_k}}1=\frac{6k\cdot x^{\frac{1}{k}}}{\pi^2}\prod_p\left(1+\frac{1}{(p+1)(p^{\frac{1}{k}}-1)}\right)+O(x^{\frac{1}{2k}+\varepsilon})$$

这样就完成了引理的证明.

3　定理的证明

这部分我们来完成定理的证明. 设 B 表示所有形式如 $p_1p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ ($\alpha_i\geqslant 2, 2\leqslant i\leqslant r$) 的正整数 n 所组成的集合,则不难知道

$$\sum_{n\leqslant x}f(n)=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A_2}}f(n)+\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in B}}f(n)=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A_2}}f(n)+\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in B}}1$$

$$= 2\Big(\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A_2}} 1-\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A_3}} 1\Big)+\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A_3}} f(n)+\Big(\sum_{n\le x} 1-\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A_2}} 1\Big)$$

$$= [x]+\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A_2}} 1-2\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A_3}} 1+2\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A_4}} 1+3\Big(\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A_3}} 1-\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A_4}} 1\Big)+\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A_4}} f(n)$$

$$= [x]+\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A_2}} 1+\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A_3}} 1+\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A_4}} f(n)-\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A_4}} 1$$

利用上述引理,我们有

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A_2}} 1=\frac{12x^{\frac{1}{2}}}{\pi^2}\prod_p\left(1+\frac{1}{(p+1)(p^{\frac{1}{2}}-1)}\right)+O(x^{\frac{1}{4}+\varepsilon})$$

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A_3}} 1=\frac{18x^{\frac{1}{3}}}{\pi^2}\prod_p\left(1+\frac{1}{(p+1)(p^{\frac{1}{3}}-1)}\right)+O(x^{\frac{1}{6}+\varepsilon})$$

以及

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A_4}} f(n)-\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A_4}} 1=O(x^{\frac{1}{4}})$$

从而有

$$\sum_{n\le x} f(n)=x+\frac{12x^{\frac{1}{2}}}{\pi^2}\prod_p\left(1+\frac{1}{(p+1)(p^{\frac{1}{2}}-1)}\right)$$
$$+\frac{18x^{\frac{1}{3}}}{\pi^2}\prod_p\left(1+\frac{1}{(p+1)(p^{\frac{1}{3}}-1)}\right)+O(x^{\frac{1}{4}+\varepsilon})$$

于是完成了定理的证明.

致谢: 作者对张文鹏教授的悉心指导表示衷心的感谢!

参 考 文 献

[1] Sabin T. About smarandache-multiplicative functions[J]. Smarandache Notions J, 2000, 11: 103~104.

[2] Erdös P. Problem and result in combinatiorial number theory[M]. Bordeaux, 1974.

[3] Smarandache F. A function in number theory[M]. Clarendon: Analele university, XVIII, 1980.

[4] Tom M. Apostol. Introduction to analytic number theory[M]. New York: Springer Verlag, 1976.

[5] 潘承洞,潘承彪.解析数论基础[M].北京: 科学出版社, 1999.

(下转第 **249**页)

$\bar{f}^T f(\bar{u})$.这与假设 $\bar{f}^T f(\bar{i}) = \bar{f}^T f(\bar{u})$ 矛盾 .因此 $\bar{i} = \bar{u}$.

参 考 文 献

[1] Bector C R., and Singh C. B-Vex Functions[J]. J. Optin. Theory Appl., 1991, 71(1): 237~ 253.

[2] Lin J C. Optimality and Duality for Generalized Fractional Programming Involving Nonsmooth Pseudoinvex Functions[J]. J. Math. Anal. Appl., 1996, 202(2): 667~ 685.

[3] Clarke FH. A New Approach to Lagrange Multipliers[J]. J. Math. Oper. Res., 1976, 1(1): 165~ 174.

Optimality and duality for a class of non-smooth programming problems

FENG Fu-ye[1,2], JIA Ji-hong[2], NIE Cheng[1]

(1. Missile College, Engineering University of Air Force, SanYuan 713800, China;
2. Department of mathematics, Dongguan Polytechnology University, Dongguan 523000, China)

Abstract A class of non-smooth programming problems is studied in this paper. Three sufficient optimality conditions are obtained for this programming. At the same time, duality problems are established also and both weak duality theorem and strong duality theorem are derived.

Key words efficient solutions, optimality conditions, weak duality and strong duality

2000 MSC 49J52

(上接第 220页)

Mean value on one kind of the F. Smarandache multiplicative function

REN Zhi-bin

(Department of Mathematics, Weinan Teachers College, Weinan 714000, China)

Abstract The main purpose of this paper is using analytic method to study the mean value of one kind of the F. Smarandache multiplicative function, and obtain an interesting asymptotic formula.

Key words F. Smarandache multiplicative function, k-full numbers, asymptotic formula

2000 MSC 11B83