第35卷 第4期　　延安大学学报(自然科学版)　　Vol.35 No.4
2016年12月　　Journal of Yanan University(Natural Science Edition)　　Dec.2016
DOI:10.13876/J.cnki.ydnse.2016.04.021

关于伪 Smarandache 函数与 F. Smarandache LCM 函数的混合均值

王曦浛,高　丽

(延安大学 数学与计算机科学学院,陕西 延安 716000)

摘　要: 运用初等和解析的方法研究了伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 与 F. Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 的混合均值问题,并获得一个有趣的渐近公式。

关键词: 伪 Smarandache 函数; F. Smarandache LCM 函数; 渐近公式

中图分类号: O156.4　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 1004-602X(2016)04-0021-03

1　引言及结论

对任意的正整数 n,著名的伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 被定义为能够使得 $n\mid m(m+1)/2$ 成立的最小的正整数 m,即 $Z(n)=\min\{m: n\mid m(m+1)/2, m\in \mathbf{N}\}$。目前对于伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 的研究是数论中非常重要和有意义的课题,许多学者研究了它的性质,并得到了一系列有理论价值的研究成果[1-7]。例如:文[3]研究了一个包含伪 Smarandache 函数的均值,即证明了

$$\sum_{n\leqslant x}\ln Z(n)=x\ln x+O(x)。$$

文[4]讨论了一类包含伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 与算数函数 $D(n)$ 的方程 $2^{Z(n)}=D(n)$ 的可解性,并获得了该方程的所有正整数解。

文[5]研究了伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 与算数函数 $\overline{\Omega}(n)$ 的混合均值,并给出渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}Z(n)\cdot\overline{\Omega}(n)=\frac{\zeta(3)}{3}\cdot\frac{x^3}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i\cdot x^3}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $a_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为可计算的常数。

文[6]研究了伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 与 Dirichlet 除数函数 $d(n)$ 的混合均值,并给出渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}Z(n)\cdot d(n)=\frac{\pi^4}{36}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i\cdot x^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $a_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为可计算的常数。

F. Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 被定为能够使得 $n\mid[1,2\cdots k]$ 成立的最小的正整数 k,其中 $[1,2\cdots k]$ 表示 $1\cdots k$ 的最小公倍数。对于任意正整数 $n>1$,若 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 是 n 的标准分解式,根据 $SL(n)$ 函数的定义很容易得到 $SL(n)=\max\{p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_s^{\alpha_s}\}$。文章主要研究伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 与 F. Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 的混合均值问题,并给出一个渐近公式。

定理: 设 $k\geqslant 2$ 是给定的正整数,则对任意的实数 $x\geqslant 2$,有渐近式

$$\sum_{n\leqslant x}Z(n)\cdot SL(n)=$$

收稿日期:2016-06-12

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11471007);陕西省科技厅科学技术研究发展计划项目(2013JQ1019);延安大学校级科研计划项目(YD2014-05);延安大学研究生教育创新计划项目

作者简介:王曦浛(1990—),女,陕西乾县人,延安大学硕士研究生。

$$\frac{\zeta(3)x^3}{3\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{d_i x^3}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right), \qquad (1)$$

其中 $d_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为可计算的常数。

2 相关引理

引理 2.1[7,8] 对任意的素数 $p\geqslant 3$ 及 $k\in\mathbf{N}$，$Z(p^k)=p^k-1$。当 $p=2$ 时，则有 $Z(2^k)=2^{k+1}-1$。若 n 为任意的合数时，$Z(n)=\max\{Z(m):m\mid n\}$。

引理 2.2[9] 对于任意的素数 p，有

$SL(p^k)=p^k$。

引理 2.3[10] 设 $x\geqslant 2$ 为实数，则有

$$\pi(x)=\sum_{p\leqslant x}1=\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i\cdot x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $c_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是常数，并且 $c_1=1$。

3 定理的证明

将所有整数 $1\leqslant n\leqslant x$ 分成三个集合 A，B 和 C，其中 $A=\{n\mid n=2^k,k=1,2,\cdots\}$；集合 B 包含所有满足条件：存在奇素数 p 使得 $p\mid n$ 的正整数 n，并且 p 满足 $p>\sqrt{n}$；集合 C 为包含区间 $[1,x]$ 中不属于集合 A 和 B 的正整数。

第一步讨论集合 A 的情况，根据引理 2.1、2.2 可知：

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}Z(n)\cdot SL(n)=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}Z(n)\cdot SL(2^k)$$

$$=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}(2^{k+1}-1)\cdot 2^k\ll\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}n^2\ll\frac{x^2}{\ln x}。\qquad (2)$$

第二步讨论集合 B 的情况，由引理 2.1 可知：

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in B}}Z(n)\cdot SL(n)=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p\mid n,p>\sqrt{n}}}Z(n)\cdot SL(n)$$

$$=\sum_{\substack{np\leqslant x\\ n<p}}Z(np)\cdot SL(np)=\sum_{\substack{np\leqslant x\\ n<p}}Z(p)\cdot p$$

$$=\sum_{\substack{np\leqslant x\\ n<p}}(p-1)\cdot p=\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sum_{n<p\leqslant\frac{x}{n}}(p^2-p)$$

$$=\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sum_{n<p\leqslant\frac{x}{n}}p^2-\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sum_{n<p\leqslant\frac{x}{n}}p。\qquad (3)$$

于是根据引理 2.3 及 Abel 求和公式[11]、分部积分法有：

$$\sum_{n<p\leqslant\frac{x}{n}}p^2=$$

$$\left(\frac{x}{n}\right)^2\pi\left(\frac{x}{n}\right)-n^2\pi(n)-\int_n^{\frac{x}{n}}2y\pi(y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{x^3}{3n^3\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i x^3\ln^i n}{n^3\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{n^3\ln^{k+1}x}\right), \qquad (4)$$

$$\sum_{n<p\leqslant\frac{x}{n}}p=\frac{x}{n}\pi\left(\frac{x}{n}\right)-n\pi(n)-\int_n^{\frac{x}{n}}\pi(y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{x^2}{2n^2\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i x^2\ln^i n}{n^2\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{n^2\ln^{k+1}x}\right), \qquad (5)$$

因此：

$$\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sum_{n<p\leqslant\frac{x}{n}}p^2=$$

$$\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\left(\frac{x^3}{3n^3\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i x^3\ln^i n}{n^3\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{n^3\ln^{k+1}x}\right)\right)$$

$$=\frac{x^3}{3\ln x}\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{n^3}+\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\left(\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i x^3\ln^i n}{n^3\ln^i x}\right)$$

$$+\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\left(O\left(\frac{x^3}{n^3\ln^{k+1}x}\right)\right)$$

$$=\frac{\zeta(3)\cdot x^3}{3\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{d_i\cdot x^3}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right), \qquad (6)$$

其中 $d_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为可计算的常数。

$$\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sum_{n<p\leqslant\frac{x}{n}}p=$$

$$\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\left(\frac{x^2}{2n^2\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i x^2\ln^i n}{n^2\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{n^2\ln^{k+1}x}\right)\right)$$

$$=\frac{x^2}{2\ln x}\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{n^2}+\sum_{i=2}^{k}\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\frac{c_i x^2\ln^i n}{n^2\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right)$$

$$=\frac{\zeta(2)\cdot x^2}{2\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{e_i\cdot x^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right), \qquad (7)$$

其中 $e_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为可计算的常数。

结合(3)，(6)，(7)式有：

$$\sum_{n\leqslant x}Z(n)\cdot SL(n)=$$

$$\frac{\zeta(3)\cdot x^3}{3\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{d_i\cdot x^3}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $d_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为可计算的常数。

第三步讨论集合 C 的情况，根据伪 Smarandache 函数的性质及集合 C 的定义可知，对任意的正整数 $n\in C$，当 n 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$，此时分为两种情况：$Z(n)=Z(p_r)=p_r-1\leqslant\sqrt{n}$ 或者 $Z(n)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant r}\{Z(p_i^{\alpha_i})\}=p_i^{\alpha_i}-1<p_i^{\alpha_i}$，其中 $\alpha_i\geqslant 2$。可以推断

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in C}}Z(n)\cdot SL(n)\ll\sum_{\substack{np\leqslant x\\ p\mid n,p\leqslant\sqrt{n}}}SL(np)\cdot\sqrt{np}$$

$$+\sum_{\substack{np^{\alpha}\leqslant x,\alpha\geqslant 2\\ p^{\alpha}|n,p\leqslant\sqrt{n}}}(\alpha+1)\cdot p^{\alpha}\cdot SL(np)$$

$$\ll\sum_{np\leqslant x}SL(n)\cdot\sqrt{n}\cdot\ln n\ll x^{\frac{5}{2}}\ln x。$$

综合以上讨论可得:

$$\sum_{n\leqslant x}Z(n)\cdot SL(n)=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}Z(n)\cdot SL(n)$$

$$+\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in B}}Z(n)\cdot SL(n)+\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in C}}Z(n)\cdot SL(n)$$

$$=\frac{\zeta(3)x^3}{3\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{d_i x^3}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $d_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为可计算的常数。于是完成了定理的证明。

参考文献:

[1] Kashihara Kenichiro. Comments and Topics on Smarandache Notions and Problems [M]. USA: Erhus University Press, 1996.

[2] Majumdar A A K. A note on the Pseudo – Smarandache function [J]. Scientia Magna, 2006, 2(3): 1 – 25.

[3] Luo Yuanbing. On the pseudo Smarandache function [J]. Scientia Magna, 2007, 3(4): 48 – 50.

[4] 葛键. 一个包含 $Z(n)$ 和 $D(n)$ 函数的方程及其它的正整数解 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2009, 25(3): 622 – 624.

[5] 王曦浛, 高丽, 鲁伟阳. 关于伪 Smarandache 函数的一个混合均值 [J]. 海南大学学报(自然科学版), 2015, 33(2): 97 – 99.

[6] 郝虹斐, 高丽, 鲁伟阳. 关于伪 Smarandache 函数与除数函数的混合均值 [J]. 延安大学学报(自然科学版), 2015, 34(2): 46 – 48.

[7] Richard Pinch. Some properties of the Pseudo Smarandache function [J]. Scientia Magna, 2005, 1(2): 167 – 172.

[8] 马荣. Smarandache 函数及其相关问题研究 [M]. USA: The Educational Publisher, 2012.

[9] Liu Yn, Li L, Liu B L. Smarandache unsolved problems and new progress [M]. Ann Arbor, MI: High American Press, 2008.

[10] 潘承洞, 潘承彪. 素数定理的初等证明 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1988.

[11] Tom M Apostol. Introduction to analytic number theory [M]. New York: Spring – Verlag, 1976.

[责任编辑　毕　伟]

On the Hybrid Mean Value of the Pseudo – Smarandache Function and F. Smarandache LCM Function

WANG Xi – han, GAO LI

(College of Mathematics and Computer Science, Yan´an University, Yan´an 716000, China)

Abstract: By using the elementary and analytic method, this paper studied the hybrid mean value problem invoving the Pseudo – Smarandache function and F. Smarandache LCM function, and given an interesting asymptotic formula for it.

Key words: Pseudo – Smarandache function; F. Smarandache LCM function; asymptotic formula