第 39 卷 第 6 期 内蒙古师范大学学报(自然科学汉文版) Vol.39 No.6
2010 年 11 月 Journal of Inner Mongolia Normal University (Natural Science Edition) Nov. 2010

关于伪 Smarandache 对偶函数的一个方程

吴 欣

(西北大学 数学系,陕西 西安 710127)

摘 要:研究方程 $SL_*(n)=Z_*(n)$ 的可解性. 利用初等和组合的方法, 通过分类讨论证明该方程有无限多个正整数解, 并给出所有解的具体形式.

关键词:伪 Smarandache 函数;Smarandache LCM 函数;对偶函数;方程;正整数解

中图分类号:O 156.4 文献标志码:A 文章编号:1001-8735(2010)06-0557-03

1 引言及结论

对于任意正整数 n, F.Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 定义为满足 $n\mid[1,2,\cdots,k]$ 的最小的正整数 k, 这里 $[1,2,\cdots,k]$ 表示 $1,2,\cdots,k$ 的最小公倍数. 其对偶函数 $SL_*(n)$ 定义为

$$SL_*(n)=\max\{k:k\in N_+,[1,2,\cdots,k]\mid n\},$$

其中 N_+ 表示所有正整数的集合. 田呈亮[1] 研究了 $SL_*(n)$ 的性质,得到一些有趣的结果. 例如, 如果 n 为奇数, 那么 $SL_*(n)=1$.

著名的伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 定义为满足 $\sum_{k=1}^{m}k$ 能被 n 整除的最小的正整数 m, 其对偶函数 $Z_*(n)=\max\{m:m\in N_+,\frac{m(m+1)}{2}\mid n\}$, 其中 N_+ 表示所有正整数的集合. 例如, $Z_*(n)$ 的前几个值为 $Z_*(1)=1$, $Z_*(2)=1$, $Z_*(3)=2$, $Z_*(4)=1$, $Z_*(5)=1$, $Z_*(6)=3$, $Z_*(7)=1$, $\cdots$

许多学者[2-4] 对函数 $Z_*(n)$ 的性质进行了研究, 并得到一些重要结果. 例如:

对于任意奇素数 p 及正整数 k,

$$Z_*(p^k)=\begin{cases}2, & p=3,\\ 1, & p\neq 3.\end{cases}$$

对于任意奇素数 p,q 满足 $p=2q-1$, $Z_*(pq)=p$.

对于所有正整数 a,b, $Z_*(ab)\geqslant\max\{Z_*(a),Z_*(b)\}$.

对于任意正整数 $s\geqslant 1$ 和任意素数 p, $Z_*(3^s\cdot p)\geqslant 2$.

本文利用初等和组合的方法研究方程

$$SL_*(n)=Z_*(n) \tag{1}$$

的可解性.

定理 方程(1)有无限多个正整数解, 它们为:

(A) $n=\prod_{i=1}^{r}p_i^{\alpha_i}$, 其中 α_i 是自然数, $r\geqslant 1$, $p_i(\geqslant 5)$ 为素数. n 的任意两因子 A 与 B 之间不存在形如 $A=2B\pm 1$ 的关系式.

(B) $n=2\cdot 3^{\alpha}\cdot l$, 其中 $(6,l)=1$, $\alpha\geqslant 1$, $l\geqslant 1$. 除 $3=2\cdot 2-1$ 外, n 的任意两因子 A 与 B 之间不存在形如 $A=2B\pm 1$ 的关系式.

收稿日期:2010-05-20

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10671155)

作者简介:吴 欣(1986-), 女, 陕西省西安市人, 西北大学硕士研究生, 主要从事基础数学研究, E-mail: happynist@163.com.

2 定理的证明

我们利用初等和组合的方法分类讨论,完成定理的证明.

(1) 当 n 为奇数时,分以下两种情况来证明.

(a) 当 $n = p^{\alpha}$ 时,其中 α 为自然数.

(ⅰ) 若 $\alpha = 0$, 则 $n = 1$. $SL_*(1) = Z_*(1) = 1$, 故 $n = 1$ 是方程(1) 的解.

(ⅱ) 若 $\alpha > 0$, 当 $p = 3$ 时, $Z_*(n) = 2$, 而 $SL_*(n) = 1$, 故 $n = 3^{\alpha}$ 不是方程(1) 的解.

当 $p \geqslant 5$ 时, $SL_*(n) = Z_*(n) = 1$, $n = p^{\alpha}$ 是方程(1) 的解.

(b) 当 n 含有多个不同素因子时, $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$, 其中 $r \geqslant 2$, $p_1, p_2, \cdots, p_r$ 为不同的奇素数, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 为不全为零的自然数. 分下列两种情况:

(ⅰ) 若 $3 | n$, 根据函数 $Z_*(n)$ 的性质有 $Z_*(n) \geqslant 2$. 而 $SL_*(n) = 1$, 故此时方程(1) 无解.

(ⅱ) 若 $3 \nmid n$, 且 n 的任意两因子 A 与 B 之间不存在形如 $A = 2B \pm 1$ 的关系式, 则 $SL_*(n) = Z_*(n) = 1$, 方程(1) 有解.

综上讨论, 我们得到方程(1) 的所有奇数解.

(2) 当 n 为偶数时, 分以下几种情况来证明.

(a) 当 $n = 2^k (k \geqslant 1)$ 时, $SL_*(2^k) = 2$, $Z_*(2^k) = 1$, 故 2^k 不是方程(1) 的解.

(b) 当 $n = 2p^{\alpha}$ 时, 其中 $p \geqslant 3$ 为素数, α 为正整数.

(ⅰ) 若 $p = 3$, 则 $SL_*(n) = Z_*(n) = 3$, 从而 $n = 6$ 是方程(1) 的解.

(ⅱ) 若 $p = 5$, 则 $SL_*(n) = 2$, $Z_*(n) = 4$, $SL_*(n) \neq Z_*(n)$. 此时方程(1) 无解.

(ⅲ) 若 $p > 5$, 由 $Z_*(n)$ 的性质可得, $Z_*(n) = 1$, 而 $SL_*(n) = 2$. 此时方程(1) 无解.

(c) 当 $n = 2 \cdot p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} = 2 \cdot t$, 其中 $r \geqslant 2$, $p_1, p_2, \cdots, p_r$ 为不同的奇素数, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是不全为零的自然数.

(ⅰ) 若 $3 \nmid t$, 则 $SL_*(n) = 2$. 易得此时 $Z_*(n) \neq 2$, 方程(1) 无解.

(ⅱ) 若 $3 | t$, 则 $SL_*(n) = 3$. 要使 $Z_*(n) = 3$, 则首先 $5 \nmid t$, $7 \nmid t$, 且除了 $3 = 2 \cdot 2 - 1$ 外, n 的任意两因子 A 与 B 之间再不存在形如 $A = 2B \pm 1$ 的关系式. 故 $n = 2 \cdot 3^{\alpha} \cdot l$ 是方程(1) 的解, 其中 $(6, l) = 1$, $\alpha \geqslant 1$, $l \geqslant 1$. 除 $3 = 2 \cdot 2 - 1$ 外, n 的任意两因子 A 与 B 之间再不存在形如 $A = 2B \pm 1$ 的关系式.

(d) 当 $n = 2^k p^{\alpha}$ 时, 其中 $k \geqslant 2$, α 为正整数. 分为以下几种情况:

(ⅰ) 若 $p = 3$, 则 $n = 2^k 3^{\alpha}$. $SL_*(n) = 4$, 当且仅当 $Z_*(n) = 4$ 时, 方程(1) 有解. 由 $Z_*(n)$ 的定义, 可得 $\frac{4 \cdot 5}{2} | n$, 从而得出矛盾.

(ⅱ) 若 $p = 5$, 则 $n = 2^k 5^{\alpha}$. $SL_*(n) = 2$, $Z_*(n) \geqslant 4$, $SL_*(n) \neq Z_*(n)$, 故此时方程(1) 无解.

(ⅲ) 若 $p > 5$, 则 $SL_*(n) = 2$. 易得此时 $Z_*(n) \neq 2$, 方程(1) 无解.

(e) 当 $n = 2^k \cdot p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} = 2^k \cdot l$, 其中 $k, r \geqslant 2$, $p_1, p_2, \cdots, p_r$ 为不同的奇素数, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是不全为零的自然数.

(ⅰ) 若 $3 \nmid l$, 则 $SL_*(n) = 2$. 易得此时 $Z_*(n) \neq 2$, 方程(1) 无解.

(ⅱ) 若 $3 | l$, 则由函数 $SL_*(n)$ 的定义可得, $SL_*(n) \geqslant 4$. 令 $SL_*(n) = m$, 则 $m + 1 \nmid n$. 要使方程有解, 则必有 $Z_*(n) = m$.

A. 当 m 为偶数时, 根据函数 $Z_*(n)$ 的定义, 有 $\frac{m(m+1)}{2} | n$, 从而得到 $m + 1 | n$. 得出矛盾.

B. 当 m 为奇数时, 由函数 $SL_*(n)$ 的定义, $SL_*(n)$ 的取值必然是介于 $2^k + 1$ 到 $2^{k+1} - 1$ 之间的奇数. 下证若 $SL_*(n)$ 的值为奇数, 则必为 $2^{k+1} - 1$. 将 $2^{k+1} - 1$ 写为 $2^k + (2^k - 1)$ 的形式, 设 $m = 2^k + a$, 其中 a 为奇数, 且 $a \leqslant 2^k - 3$, n 中含有从 1 至 $2^k + a$ 的因子. 而此时 $2^k + a + 1 \leqslant 2^k + 2^k - 2 = 2(2^k - 1)$, 从而有 $SL_*(n) \geqslant 2(2^k - 1) = 2^k + a + 1$, 这与 $2^k + a$ 是满足 $SL_*(n)$ 定义的最大值矛盾. 故此时 $SL_*(n) = 2^{k+1}$

-1. 当且仅当 $Z_*(n)=2^{k+1}-1$ 时，方程有解. 虽然 $\dfrac{2^{k+1}(2^{k+1}-1)}{2}\mid n$ 成立，但此时所取到的 $Z_*(n)=2^{k+1}-1$ 并不是满足 $Z_*(n)$ 定义的最大值. 因为等式 $3(2^{k+1}-1)=2bc+1$ 恒成立，即 $2(3\cdot 2^{k-1}-1)=bc$. 不失一般性，取 $b=2<2^{k+1}-1$，$c=3\cdot 2^{k-1}-1<4\cdot 2^{k-1}-1=2^{k-1}-1$. 显然，$3(2^{k-1}-1)\mid n$，$bc\mid n$，故

$$Z_*(n)\geqslant 3(2^{k-1}-1)-1>2^{k-1}-1.$$

由以上讨论知，该情况下方程(1)无解.

综合以上讨论，定理得证.

参考文献：

[1] Tian Chengliang. An equation involving the two Smarandache LCM dual functions [J]. Scientia Magna, 2007, 3(3): 104-107.

[2] Jozsef Sandor. On a dual of the Pseudo-Smarandache function [M]. Smarandache notions, American research press, 2002: 18-23.

[3] Majumdar A A K. On the dual functions $Z_*(n)$ and $S_*(n)$ [C]// Zhang Wenpeng. Research on Smarandache Problems in Number Theory. USA: Hexis, 2009: 74-77.

[4] Zhang Wenpeng, Li Ling. Two problems related to the Smarandache function [J]. Scientia Magna, 2008, 4(2): 1-3.

An Equation Involving the Pseudo-Smarandache Dual Function

WU Xin

(*Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an* 710127, *China*)

Abstract: The solvability of the equation $SL_*(n)=Z_*(n)$ was studied. It was proved that the equation has infinite positive integer solutions, and confirmed all concrete forms of every solution by using the elementary and combinatorial method and discuss separately.

Key words: Pseudo-Smarandache function; Smarandache LCM function; dual function; equation; positive integer solution

【责任编辑　陈汉忠】

(上接第 556 页)

On the Mean Value of the Smarandache Summands

LI Fan-bei

(*College of Mathematics and Statistics, Inner Mongolia Finance and Economics College, Hohhot* 010051, *China*)

Abstract: Let n, $k>1$ are two positive integers. $m\geqslant 0$ is another fixed integer. The general Smarandache Summands function $S(n,m,k)$ is defined by $S(n,m,k)=\sum_{i=0}^{[(n+m)/k]}(n-ki)$. The main purpose of this paper is using the elementary method, analytic method and the properties of the Gauss function to study the mean value properties of $S(n,m,k)$, and give an interesting asymptotic formula for it.

Key words: the general Smarandache Summands function; mean value; elementary method; analytic method; asymptotic formula

【责任编辑　陈汉忠】