文章编号:1004-3918(2016)09-1410-04

关于伪Smarandache无平方因子函数的一个混合均值

王曦浛， 高 丽， 李国蓉， 薛 阳

（延安大学 数学与计算机科学学院，陕西 延安 716000）

摘 要： 对任意的正整数n，伪Smarandache函数$Z(n)$定义为最小的正整数m使得$n|m(m+1)/2$，即$Z(n)=\min\{m:n|m(m+1)/2,m\in N\}$．而伪Smarandache无平方因子函数$Z_w(n)$定义为最小的正整数$m$使得$n|m^n$，即$Z_w(n)=\min\{m:n|m^n,m\in N\}$．利用初等和解析的方法研究了伪Smarandache函数$Z(n)$与伪Smarandache无平方因子函数$Z_w(n)$的混合均值问题，并获得一个较强的渐近公式．

关键词： 伪Smarandache无平方因子函数；均值；渐近公式

中图分类号： O 156.4 **文献标识码：** A

A Hybrid Mean Value of the Pseudo-Smarandache-Squarefree Function

Wang Xihan， Gao Li， Li Guorong， Xue Yang

（College of Mathematics and Computer Science，Yan'an University，Yan'an 716000，Shaanxi China）

Abstract: For any positive integer n, the famous Pseudo-Smarandache function $Z(n)$ is defined as the smallest positive integer m such that $n|m(m+1)/2$. That is, $Z(n)=\min\{m:n|m(m+1)/2,m\in N\}$. While Pseudo-Smarandache-Squarefree function $Z_w(n)$ is defined as $Z_w(n)=\min\{m:n|m^n,m\in N\}$. Using the elementary and analytic method we study the hybrid mean value problem invoving the Pseudo-Smarandache function $Z(n)$ and Pseudo-Smarandache-Squarefree function, and give a shaper asymptotic formula for it.

Key words: Pseudo-Smarandache-Squarefree function; mean value; asymptotic formula

对任意的正整数n，伪Smarandache无平方因子函数$Z_w(n)$[1]定义为最小的正整数m使得$n|m^n$，即$Z_w(n)=\min\{m:n|m^n,m\in N\}$．关于伪Smarandache无平方因子函数$Z_w(n)$的问题，受到许多学者的关注与研究，得到了一系列有趣的结果[2-11]．例如：Felice Russo在文献[2]中得到了下列性质：

性质1 对于任意素数p和正整数k，有$Z_w(p^k)=p$；

性质2 对任意正整数n，有$Z_w(n)\leqslant n$；

性质3 $Z_w(n)$是可乘函数，即若$(m,n)=1$，则$Z_w(mn)=Z_w(m)Z_w(n)$．

文献[3]研究了伪Smarandache无平方因子函数的均值，得到一个较强的渐近公式：

$$\sum_{n\leqslant x}(Z_w(n))^\alpha=\frac{\zeta(\alpha+1)x^{\alpha+1}}{\zeta(2)(\alpha+1)}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^\alpha(p+1)}\right)+O\left(x^{\alpha+\frac{1}{2}+\varepsilon}\right);$$

文献[4]研究了关于伪Smarandache无平方因子函数的混合均值问题，并给出了两个较强的渐近公式：

收稿日期：2016-03-11

基金项目：国家自然科学基金资助项目（11471007）；陕西省科技厅科学技术研究发展计划项目（2013JQ1019）；延安大学校级科研计划项目—引导项目（YD2014-05）；延安大学研究生教育创新计划项目

作者简介：王曦浛（1990-），女，硕士研究生，研究方向为数论

通信作者：高 丽（1966-），女，教授，硕士生导师，研究方向为解析数论．

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{V(n)U(n)}{Z_w(n)}=\frac{x^2}{2}\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}),\qquad \sum_{n\leqslant x}V(n)Z_w(n)=\frac{x^3}{3}\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}).$$

其中 $a_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为可计算的常数. 文献[5]研究了伪Smarandache无平方因子函数 $Z_w(n)$ 与伪Smarandache函数 $Z(n)$ 的复合函数 $Z_w(Z(n))$ 的均值,并给出了较强的渐近公式:

$$\sum_{n\leqslant x}Z_w(Z(n))=(1+\prod_p(1+\frac{1}{p(p^2-1)})\cdot\frac{4\sqrt{2}}{\pi^2}\cdot x^{\frac{3}{2}}+O(x^{\frac{5}{4}}).$$

文献[6]讨论了关于伪Smarandache无平方因子函数 $Z_w(n)$ 与Smarandache函数 $S(n)$ 的均值问题,并得到两个较强的渐近公式:

$$\sum_{n\leqslant x}Z_w(S(n))=\frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot x^2}{\ln^i x}+O(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}),$$

$$\sum_{n\leqslant x}Z_w(n)\cdot S(n)=\frac{\zeta(2)\cdot\zeta(3)}{3\zeta(4)}\prod_p(1-\frac{1}{p+p^3})\cdot\frac{x^3}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{e_i\cdot x^3}{\ln^i x}+O(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}).$$

其中 $c_i,e_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为可计算的常数.

本文主要利用初等及解析方法研究了一个伪Smarandache函数 $Z(n)$ 与伪Smarandache无平方因子函数 $Z_w(n)$ 的混合均值问题,并得到一个较强的渐近公式.

1 相关引理

引理1[12-13] 对任意的正整数 n 和 k,有 $1\leqslant Z(n)\leqslant 2n-1$,当 $n=2^k$ 时,$Z(n)=2n-1$;当 $n=p^k$ 时,$Z(n)=n-1$,其中 p 为奇素数;若 n 为任意的合数时,$Z(n)=\max\left\{Z(m):m\mid n\right\}$.

引理2[14] 设 $x\geqslant 2$ 为实数,则有

$$\pi(x)=\sum_{p\leqslant x}1=\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i\cdot x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $c_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是常数,并且 $c_1=1$.

引理3[6] 对任意实数 $x\geqslant 2$ 和 $s\geqslant 2$,则有

$$\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\frac{Z_w(n)}{n^s}=\frac{\zeta(s)\cdot\zeta(s-1)}{\zeta(2(s-1))}\cdot\prod_p(1-\frac{1}{p+p^s})+O(x^{1-\frac{s}{2}}).$$

2 主要结论及证明

定理 设 $k\geqslant 2$ 为给定的正整数,则对任意实数 $x\geqslant 2$,有渐近公式:

$$\sum_{n\leqslant x}Z_w(n)\cdot Z(n)=\frac{\zeta(3)\cdot\zeta(2)}{3\zeta(4)}\cdot\prod_p(1-\frac{1}{p+p^3})\cdot\frac{x^3}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{d_i\cdot x}{\ln^i x}+O(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}),\tag{1}$$

其中 $d_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为可计算的常数.

证明 将区间 $[1,x]$ 中的所有整数分为三个集合 A,B 和 C,其中 $A=\left\{n\mid n=2^k,k=1,2,\cdots\right\}$;集合 B 为包含所有满足条件:存在奇素数 p 使得 $p\mid n$ 的正整数 n,并且 $p>\sqrt{n}$;集合 C 为包含区间 $[1,x]$ 中不属于集合 A 和 B 的正整数 n.

首先在集合 A 中讨论,由引理1可知

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}Z_w(n)\cdot Z(n)=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}Z_w(2^k)\cdot Z(n)=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}2(2n-1)\ll\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}n^2\ll\frac{x^2}{\ln x}. \tag{2}$$

其次在集合B中讨论，由引理1可知

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in B}}Z_w(n)\cdot Z(n)=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p|n,p>\sqrt{n}}}Z_w(n)\cdot Z(n)=\sum_{\substack{np\leqslant x\\ n<p}}Z_w(np)\cdot Z(np)=\sum_{\substack{np\leqslant x\\ n<p}}Z_w(n)\cdot Z(p)\cdot Z_w(p)=$$

$$\sum_{\substack{np\leqslant x\\ n<p}}(p-1)\cdot p\cdot Z_w(n)=\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sum_{n<p<\frac{x}{n}}p^2\cdot Z_w(n)-\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sum_{n<p<\frac{x}{n}}p\cdot Z_w(n). \tag{3}$$

由引理2及Abel求和公式[15]可得

$$\sum_{n<p<\frac{x}{n}}p^2=\left(\frac{x}{n}\right)^2\pi\left(\frac{x}{n}\right)-n^2\pi(n)-\int_n^{\frac{x}{n}}2y\pi(y)\mathrm{d}y=\frac{x^3}{3n^3\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_ix^3\ln^in}{n^3\ln^ix}+O\left(\frac{x^3}{n^3\ln^{k+1}x}\right), \tag{4}$$

$$\sum_{n<p<\frac{x}{n}}p=\frac{x}{n}\pi\left(\frac{x}{n}\right)-n\pi(n)-\int_n^{\frac{x}{n}}\pi(y)\mathrm{d}y=\frac{x^2}{2n^2\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_ix^2\ln^in}{n^2\ln^ix}+O\left(\frac{x^2}{n^2\ln^{k+1}x}\right), \tag{5}$$

由引理3可得

$$\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sum_{n<p<\frac{x}{n}}p^2\cdot Z_w(n)=\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\left(\frac{x^3}{3n^3\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_ix^3\ln^in}{n^3\ln^ix}+O\left(\frac{x^3}{n^3\ln^{k+1}x}\right)\right)\cdot Z_w(n)=$$

$$\frac{x^3}{3\ln x}\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\frac{Z_w(n)}{n^3}+\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\left(\sum_{i=2}^{k}\frac{b_ix^3\ln^in}{n^3\ln^ix}\right)\cdot Z_w(n)+\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\left(O\left(\frac{x^3\cdot Z_w(n)}{n^3\ln^{k+1}x}\right)\right)=$$

$$\frac{x^3}{3\ln x}\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\frac{Z_w(n)}{n^3}+\sum_{i=2}^{k}\frac{d_ix^3}{\ln^ix}+O(\frac{x^3}{\ln^{k+1}})=\frac{\zeta(3)\cdot\zeta(2)}{3\zeta(4)}\cdot\prod_p(1-\frac{1}{p+p^3})\cdot\frac{x^3}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{d_i\cdot x^3}{\ln^ix}+O(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}), \tag{6}$$

其中 $d_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为可计算的常数．

$$\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\sum_{n<p<\frac{x}{n}}p\cdot Z_w(n)=\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\left(\frac{x^2}{2n^2\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_ix^2\ln^in}{n^2\ln^ix}+O\left(\frac{x^2}{n^2\ln^{k+1}x}\right)\right)\cdot Z_w(n)=$$

$$\frac{x^2}{2\ln x}\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\frac{Z_w(n)}{n^2}+\sum_{i=2}^{k}\frac{e_ix^2}{\ln^ix}+O(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x})=\frac{\zeta(1)}{2}\cdot\prod_p(1-\frac{1}{p+p^2})\cdot\frac{x^2}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{e_i\cdot x^2}{\ln^ix}+O(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}), \tag{7}$$

其中 $e_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为可计算的常数．

结合式（3），（6），（7）可得

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in B}}Z_w(n)\cdot Z(n)=\frac{\zeta(3)\cdot\zeta(2)}{3\zeta(4)}\cdot\prod_p(1-\frac{1}{p+p^3})\cdot\frac{x^3}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{d_i\cdot x^3}{\ln^ix}+O(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}),$$

其中 $d_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为可计算的常数．

最后在集合C中讨论，由伪Smarandache函数的性质可知，对任意的正整数 $n\in C$，当n的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$，此时有两种情况：$Z(n)=Z(p_r)=p_r-1\leqslant\sqrt{n}$ 或者 $Z(n)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant r}\left\{Z(p_i^{\alpha_i})\right\}=p_i^{\alpha_i}-1<p_i^{\alpha_i}$，其中 $\alpha_i\geqslant2$．

于是有

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in C}} Z_w(n)\cdot Z(n) \ll \sum_{\substack{np\leqslant x\\ p|n,p\leqslant\sqrt{n}}} Z_w(np)\cdot\sqrt{np} + \sum_{\substack{np^{\alpha}\leqslant x,\alpha\geqslant 2\\ p^{\alpha}|n,p\leqslant\sqrt{n}}} (\alpha+1)\cdot p^{\alpha}\cdot Z_w(np) \ll \sum_{np\leqslant x} Z_w(n)\cdot\sqrt{n}\cdot\ln n \ll x^{\frac{5}{2}}\ln x .$$

综上可知：

$$\sum_{n\leqslant x} Z_w(n)\cdot Z(n) = \sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}} Z_w(n)\cdot Z(n) + \sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in B}} Z_w(n)\cdot Z(n) + \sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in C}} Z_w(n)\cdot Z(n) =$$

$$\frac{\zeta(3)\cdot\zeta(2)}{3\zeta(4)}\cdot\prod_p\left(1-\frac{1}{p+p^3}\right)\cdot\frac{x^3}{\ln x} + \sum_{i=2}^{k}\frac{d_i\cdot x^3}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $d_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为可计算的常数．证毕．

参考文献：

[1] Smarandache F. Only problems，Not solutions[M]. Chicago：Xiquan Publishing House，1993.

[2] Russo F. A set of new Smarandache functions，sequences and conjectures in number theory[M]. Lupton，USA：American Research Press，2000.

[3] Liu Huaning，Gao Jing. Mean value on the Pseudo-Smarandache Squarefree function[J]. Research on Smarandache Problems in Number Theory（Collected papers）. Chicago：Xiquan Publishing House，2004：9-11.

[4] 赵杏花，郭金保，穆秀梅. 关于伪Smarandache无平方因子函数的混合均值[J]. 河南科学，2011，29（11）：1279-1281.

[5] Fan Xuhui，Chengliang Tian. On the mean value of the Pseudo-Smarandache-Squarefree function[J]. Scientia Magna，2008，4（1）：86-89.

[6] Fan Xuhui. On the Pseudo-Smarandache-Squarefree function[J]. Scientia Magna，2008，4（4）：7-11.

[7] 关文吉，郑亚妮. 关于伪Smarandache函数的一个方程[J]. 纺织高效基础科学学报，2008，21（2）：151-153.

[8] 王春萍. 与Smarandache函数相关的一些方程[D]. 西安：西北大学，2010：27-30.

[9] Li Jianghua. On the Pseudo-Smarandache-Squarefree function[J]. Scientia Magna，2007，3（3）：93-96.

[10] Cheng Bin. On the Pseudo Smarandache Square-free function[J]. Scientia Magna，2008，4（2）：21-24.

[11] 张　沛. 一个包含伪Smarandache无平方因子函数的方程[J]. 郑州大学学报：理学版，2008，40（2）：36-38.

[12] Pinch R. Some properties of the Pseudo Smarandache function[J]. Scientia Magna，2005，1（2）：167-172.

[13] 马　荣. Smarandache函数及其相关问题研究[M]. USA：The Educational Publisher，2012.

[14] 潘承洞，潘承彪. 素数定理的初等证明[M]. 上海：上海科学技术出版社，1988.

[15] Apostol T M. Introduction to analytic number theory[M]. New York：Spring-Verlag，1976.

（编辑　张松林）