DOI:10.13537/j.issn.1004-3918.2011.11.028

第29卷 第11期 河 南 科 学 Vol.29 No.11
2011年11月 HENAN SCIENCE Nov. 2011

文章编号:1004-3918(2011)11-1279-03

关于伪 Smarandache 无平方因子函数的混合均值

赵杏花, 郭金保, 穆秀梅, 何 桃

(延安大学 数学与计算机科学学院,陕西 延安 716000)

摘 要:利用初等和解析的方法研究两个关于伪 Smarandache 无平方因子函数的混合均值问题,并给出它们的渐近公式.

关键词:伪 Smarandache 无平方因子函数;均值;渐近公式

中图分类号:O 156.4 文献标识码:A

1 引言及结论

对任意正整数 n,伪 Smarandache 无平方因子函数 $Z_w(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n|m^n$,即

$$Z_w(n)=\min\{m:m\in \mathbf{N}^*,n|m^n\}.$$

其中 $\mathbf{N}^*$ 为正整数. 关于 $Z_w(n)$ 的初等性质,许多学者进行了研究,得到了一系列有趣的结果,其中 Felice Russo 在文献[1]中得出了下列性质:

性质1 对于任意素数 p 和正整数 k,有 $Z_w(p^k)=p$;

性质2 对任意正整数 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 为 n 的标准分解式,有 $Z_w(n)=p_1p_2\cdots p_r$;

性质3 对任意正整数 n,有 $Z_w(n)\leqslant n$.

对任意正整数 n,数论函数 $V(n)$ 和 $U(n)$ 分别定义为:

$V(1)=U(1)=1$ 当 $n>1$ 时,令 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 为 n 的标准分解式,

$$V(n)=\min_{1\leqslant i\leqslant r}\{\alpha_1p_1,\alpha_2p_2,\cdots,\alpha_rp\},$$

$$U(n)=\max_{1\leqslant i\leqslant r}\{\alpha_1p_1,\alpha_2p_2,\cdots,\alpha_rp\}.$$

上述三个数论函数都是 Smarandache 在文献[2]中引入的. 本文利用初等和解析的方法研究了两个关于伪 Smarandache 无平方因子函数的混合均值的问题,并给出了它们的渐近公式,即:

定理1 设 $k\geqslant 2$ 为给定的整数,则对任意实数 $x\geqslant 2$,有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{V(n)U(n)}{Z_w(n)}=\frac{x^2}{2}\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1} x}\right).$$

其中 $a_i=(i-1)!$.

定理2 设 $k\geqslant 2$ 为给定的整数,则对任意实数 $x\geqslant 2$,有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}V(n)Z_w(n)=\frac{x^3}{3}\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1} x}\right).$$

其中 $a_i=(i-1)!$.

2 引理

为了完成定理的证明,需要引入下面3个简单引理:

收稿日期:2011-07-07
基金项目:国家自然科学基金(10901128)
作者简介:赵杏花(1986-),女,陕西泾阳人,在读硕士研究生;
郭金保(1953-),男,陕西府谷人,教授,硕士生导师.

引理1 设 $x\geqslant 2$ 是实数，则有：

$$\pi(x)=\sum_{p\leqslant x}1=\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right).$$

其中 $a_i=(i-1)!$.

证明 参阅文献[3]的3.1中定理3.2.

引理2 设 p 为素数，则有

$$\sum_{p\leqslant x}p^k=\frac{1}{k+1}x^{k+1}\sum_{i=1}^{r}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^{r+1}x}\right).$$

证明 由引理1以及Abel恒等式[4]可得

$$\sum_{p\leqslant x}p^k=\pi(x)x^k-k\int_1^x t^{k-1}\pi(t)\,dt=$$

$$x^k\left(\sum_{i=1}^{r}\frac{a_i x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{r+1}x}\right)\right)-k\int_1^x t^{k-1}\left(\sum_{i=1}^{r}\frac{a_i t}{\ln^i t}+O\left(\frac{t}{\ln^{r+1}t}\right)\right)dt=$$

$$\frac{1}{k+1}x^{k+1}\sum_{i=1}^{r}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^{r+1}x}\right).$$

引理3 设 $r>1$ 是任意正整数，且 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 为 n 的标准分解式，则有

$$V(n)\leqslant\sqrt[r]{n}.$$

证明 参阅文献[5].

3 定理的证明

对任意正整数 $n>1$，令 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 为 n 的标准分解式．把区间 $(1,x]$ 的所有正整数 n 分成如下两部分：

A：$n=p^{\alpha}\leqslant x$，$\alpha\geqslant 1$，其中 p 为素数；

B：$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$，$r\geqslant 2$ 且设 $V(n)=\alpha_1 p_1$，$U(n)=\alpha_2 p_2$.

首先给出定理1的证明．由上面的分法有

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{V(n)U(n)}{Z_w(n)}=1+\sum_{n\in A}\frac{V(n)U(n)}{Z_w(n)}+\sum_{n\in B}\frac{V(n)U(n)}{Z_w(n)}.\tag{1}$$

由性质1我们可以得到

$$\sum_{n\in A}\frac{V(n)U(n)}{Z_w(n)}=\sum_{p\leqslant x}\frac{p^2}{p}+\sum_{2\leqslant\alpha\leqslant\ln x}\sum_{p\leqslant x^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{\alpha^2p^2}{p}=\sum_{p\leqslant x}p+\sum_{2\leqslant\alpha\leqslant\ln x}\alpha^2\sum_{p\leqslant x^{\frac{1}{\alpha}}}p.$$

由引理2可得

$$\sum_{p\leqslant x}p=\frac{x^2}{2}\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right),$$

$$\sum_{2\leqslant\alpha\leqslant\ln x}\alpha^2\sum_{p\leqslant x^{\frac{1}{\alpha}}}p\ll\sum_{2\leqslant\alpha\leqslant\ln x}\alpha^2\frac{x}{\ln x}\ll x\ln^2 x.$$

所以

$$\sum_{n\in A}\frac{V(n)U(n)}{Z_w(n)}=\frac{x^2}{2}\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right).\tag{2}$$

由性质2可得

$$\sum_{n\in B}\frac{V(n)U(n)}{Z_w(n)}=\sum_{n\in B}\frac{\alpha_1\alpha_2p_1p_2}{p_1p_2\cdots p_r}\leqslant\sum_{n\in B}\frac{\alpha_1\alpha_2p_1p_2}{p_1p_2}=\sum_{n\in B}\alpha_1\alpha_2\ll\sum_{n\leqslant x}n^{\frac{1}{2}}\ll x^{\frac{3}{2}}.\tag{3}$$

将(3)式和(2)式代入(1)式,得

$$\sum_{n\leq x}\frac{V(n)U(n)}{Z_w(n)}=\frac{x^2}{2}\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right).$$

于是完成了定理 1 的证明.

下面证明定理 2.

$$\sum_{n\leq x}V(n)Z_w(n)=1+\sum_{n\in A}V(n)Z_w(n)+\sum_{n\in B}V(n)Z_w(n). \tag{4}$$

由性质 1 我们可以得到

$$\sum_{n\in A}V(n)Z_w(n)=\sum_{n\in A}\alpha p^2=\sum_{p\leq x}p^2+\sum_{2\leq\alpha\leq\ln x}\sum_{p\leq x^{\frac{1}{\alpha}}}\alpha p^2.$$

由引理 2 可得到

$$\sum_{p\leq x}p^2=\frac{x^3}{3}\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right),$$

$$\sum_{2\leq\alpha\leq\ln x}\sum_{p\leq x^{\frac{1}{\alpha}}}\alpha p^2=\sum_{2\leq\alpha\leq\ln x}\alpha\sum_{p\leq x^{\frac{1}{\alpha}}}p^2\ll\sum_{2\leq\alpha\leq\ln x}\alpha\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x}\ll x^{\frac{3}{2}}\ln x.$$

所以

$$\sum_{n\in A}V(n)Z_w(n)=\frac{x^3}{3}\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right). \tag{5}$$

由性质 3 和引理 3 我们可以得到

$$\sum_{n\in B}V(n)Z_w(n)\leq\sum_{n\in B}Z_w(n)\sqrt[r]{n}\ll\sum_{n\leq x}n\sqrt{n}\ll x^{\frac{5}{2}}. \tag{6}$$

将(5)式和(6)式代入(4)式,可得

$$\sum_{n\leq x}V(n)Z_w(n)=\frac{x^3}{3}\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right).$$

于是完成了定理 2 的证明.

参考文献:

[1] Felice Russo. A set of new smarandache function, sequences and conjectures in number theory[M]. Lupton USA: American Research Press, 2000.

[2] Smarandache F. Only problems, not solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[3] 潘承洞,潘承彪. 素数定理的初等证明[M]. 上海:上海科学技术出版社, 1988.

[4] 潘承洞,潘承彪. 解析数论基础[M]. 北京:科学出版社, 1999.

[5] 贺艳峰. 两个数论函数的混合均值公式[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2008, 25(4): 477-479.

Hybrid Mean Value Involving the Pseudo Smarandache Squarefree Function

Zhao Xinghua, Guo Jinbao, Mu Xiumei, He Tao

(School of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an 716000, Shaanxi China)

Abstract: Two hybrid mean value problems involving the pseudo Smarandache squarefree function are studied by using the elementary and analytic methods, and their asymptotic formulas are given.

Key words: the pseudo Smarandache squarefree function; mean value; asymptotic formula