DOI:10.16152/j.cnki.xdxbzr.2006.04.001
西北大学学报(自然科学版)
2006年8月,第36卷第4期,Aug.,2006,Vol.36,No.4
Journal of Northwest University (Natural Science Edition)

·数理科学与信息科学·

关于第二类Smarandache伪5倍数数列

李 洁
(西北大学 数学系,陕西 西安 710069)

摘要:目的 研究伪5倍数数列的均值性质。方法 初等及解析的方法。结果 给出伪5倍数数列的一个有趣的渐近公式。结论 对于类似第二类Smarandache伪5倍数集合上的均值性质,可以利用讨论数列特性的方法给出均值公式。

关 键 词:第二类Smarandache伪5倍数;均值;渐近公式
中图分类号:O156.4 文献标识码:A 文章编号:1000-274X(2006)04-0517-02

1 引言和结论

如果一个数本身不是5的倍数,但经过若干次置换后成为5的倍数,这样的数称为第二类Smarandache伪5倍数。例如:51,52,53,54,56,57,58,59,101,102,103,104,106…等数都是第二类伪5倍数。令A表示第二类Smarandache伪5倍数的集合。同样可以定义第二类Smarandache伪偶数和第二类Smarandache伪奇数。令B表示所有第二类Smarandache伪偶数的集合,C表示所有第二类Smarandache伪奇数的集合。在参考文献[1]中,F. Smarandache教授建议研究伪5倍数序列的性质。关于这一问题,文献[2]证明了

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\leqslant x}} f(n)=\sum_{n\leqslant x} f(n)+O(Mx^{\frac{\ln 8}{\ln 10}})。$$

这里$f(n)$是任意的算术函数,且$M=\max\{|f(n)|\}$。取$f(x)=d(n)$或$\Omega(n)$,$d(n)$是除数函数,$\Omega(n)$表示所有n的素因子,

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\leqslant x}} d(n)=x\ln x+(2\gamma-1)x+O(x^{\frac{\ln 8}{\ln 10}+\varepsilon})。$$

这里γ表示Euler常数,ε是任意给定的正数,及

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\leqslant x}} \Omega(n)=x\ln\ln x+Bx+O\left(\frac{x}{\ln x}\right)。$$

这里B是可计算的常数。本文中,利用初等方法研究了第二类Smarandache伪5倍数的倒数所形成的级数,并得到了一个有趣的渐近公式,即证明了如下

定理1 对任意实数$x\geqslant 1$,有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\leqslant x}} \frac{1}{n}=\frac{4}{5}\ln x+\frac{4\gamma+\ln 5}{5}-A+O(x^{\frac{\ln 8}{\ln 10}-1})。$$

其中A是一个常数。

定理2 对任意实数$x\geqslant 1$,有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\in B\\ n\leqslant x}} \frac{1}{n}=\frac{1}{2}\ln x+\frac{\gamma+\ln 2}{2}-B+O(\bar{x}^{\lg 2})。$$

其中B是一个常数。

定理3 对任意实数$x\geqslant 1$,有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\in C\\ n\leqslant x}} \frac{1}{n}=\frac{1}{2}\ln x+\frac{\gamma+\ln 2}{2}-C+O(\bar{x}^{\lg 2})。$$

其中C是一个常数。

2 几个引理

为了完成定理的证明,需要下面几个引理。

引理1[3,4] 对任意实数$x\geqslant 1$,有渐近公式

收稿日期:2004-10-10
基金项目:国家自然科学基金资助项目(60472068)
作者简介:李 洁(1979-),女,咸阳人,西北大学数学系硕士生,从事基础数学研究。

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n}=\ln x+\gamma+O\left(\frac{1}{x}\right)。$$

其中 γ是 Euler常数。

引理 2 对任意实数 $x\geqslant 1$,令 D表示所有十进制数字中各位数字为 1,2,3,4,6,7,8,9的自然数的集合。那么有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\in D\\ n\leqslant x}}\frac{1}{n}=A+O\left(x^{\frac{\ln 8}{\ln 10}-1}\right)。$$

其中 A是一个可计算常数。

证 明 从集合 D的定义中发现,D中元素的各位数字为 1,2,3,4,6,7,8,9,不包含 0和 5。所以,在 D中所有的一位数字有 8个,所有的 2位数字有 8^2个,所有的 m位数字有 8^m个。因此有

$$\sum_{n\in D}\frac{1}{n}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots<$$

$$8+\frac{8^2}{10}+\frac{8^3}{10^2}+\cdots=$$

$$8\left(1+\frac{8}{10}+\frac{8^2}{10^2}+\cdots\right)=40。$$

这说明了无穷级数$\sum_{n\in D}\frac{1}{n}$是收敛的。令 A表示该级数的值,又对任意 $x\geqslant 1$,设正整数 k满足 $10^k\leqslant x<10^{k+1}$,所以有

$$\sum_{\substack{n\in D\\ n\leqslant x}}\frac{1}{n}=\sum_{n\in D}\frac{1}{n}-\sum_{\substack{n\in D\\ n>x}}\frac{1}{n}=$$

$$A+O\left(\sum_{n\geqslant k}\frac{8^{n+1}}{10^n}\right)=$$

$$A+O\left(\frac{8^{k+1}}{10^k}\left(1+\frac{8}{10}+\frac{8^2}{10^2}+\cdots\right)\right)=$$

$$A+O\left(8\times 40\frac{8^{\ln x}}{x}\right)=A+O\left(x^{\frac{\ln 8}{\ln 10}-1}\right)。$$

这就证明了引理 2。

3 定理的证明

现在来完成定理的证明。

首先证明定理 1。从第二类 Smarandache伪 5倍数数的定义和引理 1,2有

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\leqslant x}}\frac{1}{n}=\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n}-\sum_{n\leqslant\frac{x}{5}}\frac{1}{5n}-\sum_{n\in D}\frac{1}{n}=$$

$$\ln x+\gamma+O\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{5}\left[\ln\frac{x}{5}+\gamma+O\left(\frac{1}{x}\right)\right]-$$

$$A+O\left(x^{\frac{\ln 8}{\ln 10}-1}\right)=$$

$$\frac{4}{5}\ln x+\frac{4\gamma+\ln 5}{5}-A+O\left(\frac{1}{x}\right)+O\left(x^{\frac{\ln 8}{\ln 10}-1}\right)=$$

$$\frac{4}{5}\ln x+\frac{4\gamma+\ln 5}{5}-A+O\left(x^{\frac{\ln 8}{\ln 10}-1}\right)。$$

这就证明了定理 1。利用同样的方法便可以证明定理 2和定理 3。

致谢:本文得到张文鹏教授的悉心指导,作者表示衷心的感谢!

参考文献:

[1] SMARANDACHE F. Only Problems, Not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publ House, 1993.

[2] ZHANG Wen-peng. Research on Smarandache Problems in Number Theory[C]. Phoenix, USA: Hexis, 2004: 17-19.

[3] TOM M A. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1976: 55.

[4] 邓玉平,张文鹏. 关于 D. H. Lehmer问题的一个推广[J]. 西北大学学报:自然科学版, 2001, 31(4): 277-280.

(编 辑 亢小玉)

On the second Smarandache pseudo-multiples of 5 sequence

LI Jie

(Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710069, China)

Abstract: Aim To study the mean value properties of the Smarandache pseudo-multiples of 5 number sequence. Methods Elementary and analytic method. Results An interesting asymptotic formula is given for it. Conclusion The mean value formula is made by using properties of the special sequence.

Key words: the second Smarandache pseudo-multiples of 5 numbers; mean value; asymptotic formula