文章编号:1006-8341(2016)01-0008-03 DOI:10.13338/j.issn.1006-8341.2016.01.002

包含 Smarandache 幂函数的均值问题

高 丽,马娅锋

(延安大学 数学与计算机科学学院,陕西 延安 716000)

摘要:利用初等数论和解析数论的方法研究著名的 Smarandache 幂函数 $SP(n)$ 的均值估计问题. 首先给出 Smarandache 幂函数 $SP(n)$ 的定义,几个重要的性质和相关引理. 在此基础上得到了一些有意义的结果,即在简单数序列上得到了 $\sum\limits_{\substack{n\in A\\ n\leqslant x}}\frac{1}{S(SP(n))}$ 和 $\sum\limits_{\substack{n\in A\\ n\leqslant x}}S(SP(n))$ 的均值.

关键词:Smarandache 幂函数;简单数;均值

中图分类号:O 156.4 **文献标识码**:A

The average issue involving the Smarandache power function

GAO Li, MA Yafeng

(College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an 716000, Shaanxi, China)

Abstract: Using elementary number theory and methods of analytic number theory to study the problem of the mean estimate of the famous Smarandache power function $SP(n)$. First the definition and several important properties of Smarandache power function $SP(n)$ were given, then based on several related lemma, some meaningful results were obtained that is the mean value of $\sum\limits_{\substack{n\in A\\ n\leqslant x}}\frac{1}{S(SP(n))}$ and $\sum\limits_{\substack{n\in A\\ n\leqslant x}}S(SP(n))$ on the simple number sequences.

Key words: Smarandache power function; simple numbers; mean value

1 引言及结论

对任意的正整数 n,著名的 Smarandache 幂函数[1] 定义为

$$SP(n)=\min\{m: n \mid m^m, m\in \mathbf{N}_+\},\tag{1}$$

容易得到 Smarandache 幂函数的序列 $\{SP(n)\}$:1,2,3,2,5,6,7,4,3,10,11,6,13,⋯. 文献[2]给出了简单

收稿日期:2015-04-10

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11471007);陕西省科学技术研究发展计划项目(2013JQ1019);陕西省教育厅科研计划项目(12JK0893);延安大学校级科研计划项目(YD2014-05);延安大学高水平大学建设项目(2012SXTS07)

通讯作者:高丽(1966—),女,陕西省绥德县人,延安大学教授,研究方向为数论、函数等. E-mail:yadxgl@163.com

引文格式:高丽,马娅锋. 包含 Smarandache 幂函数的均值问题[J]. 纺织高校基础科学学报,2016,29(1):8-10.
GAO Li, MA Yafeng. The average issue involving the Smarandache power function[J]. Basic Sciences Journal of Textile Universities, 2016, 29(1): 8-10.

数的定义. 如果 n 的所有真因子的乘积小于或等于 n，则称 n 为简单数.

当 $n=p^{\alpha}$ 时，Smarandache 幂函数 $SP(n)$ 有

$$SP(n)=\begin{cases} p, & 1\leqslant\alpha\leqslant p, \\ p^2, & p+1\leqslant\alpha\leqslant 2p^2, \\ p^3, & 2p^2+1\leqslant\alpha\leqslant 3p^3, \\ \cdots & \cdots \\ p^{\alpha}, & (\alpha-1)p^{\alpha-1}+1\leqslant\alpha\leqslant\alpha p^{\alpha}. \end{cases}$$

许多学者关于 Smarandache Ceil 幂函数的研究给出了许多重要的结果[3-10]. 徐哲峰[3] 研究了包含序列 $\{SP(n)\}$ 的均值性质，并得到了以下几个渐进公式：

$$\sum_{n\leqslant x}SP(n)=\frac{1}{2}x^2\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p(p+1)}\right)+o(x^{3/2+\varepsilon}),$$

其中 ε 为任意的正数，$\prod\limits_{p}$ 表示对所有素数的乘积；

$$\sum_{n\leqslant x}\varphi(SP(n))=\frac{1}{2}x^2\prod_{p}\left(1-\frac{2}{p(p+1)}\right)+o(x^{3/2+\varepsilon}),$$

其中 $\varphi(n)$ 为欧拉函数.

$$\sum_{n\leqslant x}d(SP(n))=\frac{6x\ln x}{\pi^2}+\left(\frac{12\gamma-6}{\pi^2}-\frac{72\zeta'(2)}{\pi^4}\right)+o(x^{1/2+\varepsilon}),$$

其中 $d(n)$ 表示 Dirichlet 除数函数，$\zeta(s)$ 表示 Rieman zeta 函数，γ 为欧拉函数.

贺艳峰[4] 研究了包含 Smarandache 幂函数的混合均值，得到以下渐进公式：

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{u(n)}{SP(n)}=x+o(x^{1/2+\varepsilon}),\sum_{n\leqslant x}\frac{u(n)}{SP^k(n)}=x^{1-k}+o(x^{1/2-k+\varepsilon}).$$

本文主要研究包含 Smarandache 幂函数 $SP(n)$ 的数论函数 $S(SP(n))$ 的均值问题，得到以下结果：

定理 1 $$\sum_{\substack{n\in A\\ n\leqslant x}}\frac{1}{S(SP(n))}=\frac{2x\ln\ln x}{\ln x}+D_1\frac{x}{\ln x}+o\left(\frac{x\ln\ln x}{\ln^2 x}\right).$$

定理 2 $$\sum_{\substack{n\in A\\ n\leqslant x}}S(SP(n))=\frac{2x\ln\ln x}{\ln x}+D_2\frac{x}{\ln x}+o\left(\frac{x\ln\ln x}{\ln^2 x}\right).$$

其中 A 表示所有简单数的集合，$S(n)$ 表示 Smarndache 函数.

2 定理证明

为证明定理需要下面几个引理.

引理 1[11] $\sum\limits_{pq\leqslant x}1=\dfrac{2x\ln\ln x}{\ln x}+E\dfrac{x}{\ln x}+o\left(\dfrac{x\ln\ln x}{\ln^2 x}\right)$，其中 E 为常数.

引理 2[12] 若 n 为简单数，则 n 只能取 $n=p$，$n=p^2$，$n=p^3$ 或 $n=pq$，p 和 q 为不同的素数.

引理 3[12] 对任意给定的实数 x，$\pi(x)$ 表示不超过 x 的素数的个数，有

$$\pi(x)=\frac{x}{\ln x}+\frac{x}{\ln^2 x}+o\left(\frac{x}{\ln^3 x}\right).$$

定理 1 的证明

$$\sum_{\substack{n\in A\\ n\leqslant x}}\frac{1}{S(SP(n))}=\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{S(SP(p))}+\sum_{p^2\leqslant x}\frac{1}{S(SP(p^2))}+\sum_{p^3\leqslant x}\frac{1}{S(SP(p^3))}+\sum_{\substack{pq\leqslant x\\ p\neq q}}\frac{1}{S(SP(pq))}=$$

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{S(p)}+\sum_{p^2\leqslant x}\frac{1}{S(p)}+\frac{1}{S(SP(2^3))}+\sum_{\substack{p^3\leqslant x\\ p>2}}\frac{1}{S(SP(p^3))}+\sum_{pq\leqslant x}\frac{1}{S(pq)}=$$

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{S(p)}+\sum_{p^2\leqslant x}\frac{1}{S(p)}+\frac{1}{S(4)}+\sum_{p^3\leqslant x}\frac{1}{S(p)}-\frac{1}{S(2)}+\sum_{pq\leqslant x}\frac{1}{S(pq)}=$$

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}+\sum_{p^2\leqslant x}\frac{1}{p}+\frac{1}{4}+\sum_{p^3\leqslant x}\frac{1}{p}-\frac{1}{2}+\sum_{pq\leqslant x}\frac{1}{p}=$$

$$\ln\ln x+A_1+o\left(\frac{1}{\ln x}\right)+\ln\ln\sqrt{x}+A_2+o\left(\frac{1}{\ln\sqrt{x}}\right)+\ln\ln\sqrt[3]{x}+A_3+o\left(\frac{1}{\ln\sqrt[3]{x}}\right)+$$

$$E_1\ln\ln x+E_2A_1+o\left(\frac{1}{\ln x}\right)-\frac{1}{4}=E\ln\ln x+\ln\ln\sqrt{x}+\ln\ln\sqrt[3]{x}+o\left(\frac{1}{\ln\sqrt[3]{x}}\right)+A.$$

其中 $E=1+E_1$ 为常数. 定理 1 得证 .

定理 2 的证明

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\in A\\ n\leqslant x}}S(SP(n))=&\sum_{p\leqslant x}S(SP(p))+\sum_{p^2\leqslant x}S(SP(p^2))+\sum_{p^3\leqslant x}S(SP(p^3))+\sum_{\substack{pq\leqslant x\\ p\neq q}}S(SP(pq))=\\&\sum_{p\leqslant x}S(p)+\sum_{p^2\leqslant x}S(p)+S(SP(2^3))+\sum_{\substack{p^3\leqslant x\\ p>2}}S(SP(p^3))+\sum_{pq\leqslant x}S(pq)=\\&\sum_{p\leqslant x}S(p)+\sum_{p^2\leqslant x}S(p)+S(4)+\sum_{p^3\leqslant x}S(p)-S(2)+\sum_{pq\leqslant x}S(pq)=\\&\sum_{p\leqslant x}P+\sum_{p^2\leqslant x}P+4+\sum_{p^3\leqslant x}P-2+\sum_{pq\leqslant x}P=\\&\frac{x^2}{2\ln x}+\frac{x^2}{4\ln^2x}+o\left(\frac{x^2}{\ln^3x}\right)+\frac{x}{2\ln\sqrt{x}}+\frac{x}{4\ln^2\sqrt{x}}+o\left(\frac{x}{\ln^3\sqrt{x}}\right)+\frac{\sqrt[3]{x}}{2\ln\sqrt[3]{x}}+\frac{\sqrt[3]{x}}{4\ln^2\sqrt[3]{x}}+\\&o\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{\ln^3\sqrt[3]{x}}\right)+C_1\frac{x^2}{2\ln x}+C_2\frac{x^2}{4\ln^2x}+o\left(\frac{x^2}{\ln^3x}\right)+2=D_1\frac{x^2}{2\ln x}+D_2\frac{x^2}{4\ln^2x}+o\left(\frac{x^2}{\ln^3x}\right).\end{aligned}$$

其中 D_1,D_2 为常数. 定理 2 得证.

参考文献(References):

[1] 马金萍. 数论函数和数列的性质研究[M]. 北京:科学出版社,2012:14-15.
MA Jinping. Study on properties of arithmetical functions and sequences[M]. Beijing:Science Press,2012:14-15.

[2] SMARANDACHE F. Olny problems,not solutions[M]. Chicago:Xiquan Publ House,1993.

[3] 徐哲峰. Smarandache 幂函数的均值[J]. 数学学报,2006,49(1):77-80.
XU Zhefeng. The elementary number of Smarandache power function[J]. Journal of Mathematics,2006,49(1):77-80.

[4] 贺艳峰. 关于 Smarandache 幂函数的混合均值[J]. 延安大学学报:自然科学版,2008,27(1):1-2.
HE Yanfeng. On the hybrid mean value formula involving Smarandache power function[J]. Journal of Yan'an University:Natural Science Edition,2008,27(1):1-2.

[5] ZHOU Huanqin. An infinite series involving the Smarandache power function $SP(n)$[J]. Scientia Magna,2006,2(3):109-112.

[6] 赵娜娜. 一个关于 Smarandache LCM 对偶函数的方程[J]. 纺织高校基础科学学报,2013,26(3):323-327.
ZHAO Nana. An equation involving the Smarandache LCM dual function[J]. Basic Sciences Journal of Textile Universities,2013,26(3):323-327.

[7] PAN Xiaowei. On the solutions of an equation involving the Smarandache power function $SP(n)$[J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics,2008,23(3):437-441.

[8] 田呈亮. Smarandache 函数及其相关序列的算术性质研究[D]. 西安:西北大学,2009:13-32.
TIAN Chengliang. Study on the arithmetic properties Smarandache function and its related sequences[D]. Xi'an:Northwestern University,2009:13-32.

[9] 童敏娜. 一个新的伪 Smarandache LCM 函数及其均值[J]. 纺织高校基础科学学报,2013,26(1):18-20.
TONG Minna. A new pseudo-Smarandache function and its mean value[J]. Basic Sciences Journal of Textile Universities,2013,26(1):18-20.

[10] 苏娟丽. 关于 Smarandache LCM 函数的一个下界估计[J]. 纺织高校基础科学学报,2009,22(1):133-134.
SU Juanli. A lower bound estimate for the Smarandache LCM function[J]. Basic Sciences Journal of Textile Universities,2009,22(1):133-134.

[11] 袁泉. 一些数论函数的推广及均值问题[D]. 西安:西北大学,2013:11-23.
YUAN Quan. On some arithmetical functions and mean value problems[D]. Xi'an:Northwestern University,2013:11-23.

[12] YI Y,KANG X Y. Research on Smarandache problems[M]. USA:High American Press,2006:13-57.

编辑、校对:师 琅