第 31 卷 第 6 期
2013 年 12 月
陕西科技大学学报
Journal of Shaanxi University of Science & Technology
Vol. 31 No. 6
Dec. 2013

文章编号：1000-5811(2013)06-0163-03

包含伪 Smarandache 函数与 Euler 函数的两个方程

高 丽，鲁伟阳，郝虹斐
（延安大学 数学与计算机科学学院，陕西 延安 716000）

摘 要：利用初等方法以及伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 和 Euler 函数 $\varphi(n)$ 的性质，讨论了两个数论函数方程 $\varphi(n)=Z(n^k)$ 与 $Z(n)+\varphi(n)=2n$ 的可解性问题，并求出所有正整数解.

关键词：伪 Smarandache 函数；Euler 函数；正整数解
中图法分类号：O156.4 **文献标识码**：A

Two equations involving the Pseudo-Smarandache function and Euler function

GAO Li, LU Wei-yang, HAO Hong-fei
(College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an 716000, China)

Abstract: The main purpose of this paper is to study the solvability of two equationsand by using elementary methods and the properties of the Pseudo-Smarandache function and the Euler function. All positive integer solutions of them are given.

Key words: Pseudo-Smarandache function; Euler function; positive integer solutions

0 引言

对任意的正整数 n，著名的伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n \mid \frac{m(m+1)}{2}$，即 $Z(n)=\min\{m: m\in N, n \mid \frac{m(m+1)}{2}\}$. 从 $Z(n)$ 的定义可以计算出 $Z(n)$ 的前几个值为：$Z(1)=1, Z(2)=3, Z(3)=2, Z(4)=7, Z(5)=4, Z(6)=3, Z(7)=6, Z(8)=15, Z(9)=8, Z(10)=4, Z(11)=10, \cdots$，关于 $Z(n)$ 的初等性质，许多学者进行了研究，并获得了不少有意义的结果. 例如：Kenichiro Kashihara[1] 研究了 $Z(n)$ 的一些初等性质；A. A. K. Majumdar[2] 进一步研究了 $Z(n)$ 的性质，给出 $Z(2p), Z(3p), Z(2p^2), Z(3p^3), Z(2p^k), Z(3p^k), Z(4p), Z(5p), Z(6p), Z(7p), Z(11p)$，（其中 p 为素数）的表达形式；Yuanbing Lou[3] 研究了一个包含伪 Smarandache 函数的均值问题，得到了一个渐近式：

$$\sum_{n\leqslant x}\ln Z(n)=x\ln x+O(x)\ ;$$

Lin Cheng[4] 也讨论了一个包含伪 Smarandache 函数的均值，得到渐近式：

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{p(n)}{Z(n)}=\frac{x}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right)\ ;$$

Yani Zheng[5] 证明了对任意的正整数 n 与足够大的 M，$\frac{Z(n+1)}{Z(n)}>M$ 和 $\mid Z(n+1)-Z(n)$

收稿日期：2013-10-29
基金项目：国家自然科学基金项目(10271093)；陕西省教育厅专项科研计划项目(07JK430)；延安大学自然科学专项科研基金项目(YDZ2013-04)；延安大学 2013 年研究生教育创新计划项目
作者简介：高 丽(1966－)，女，陕西绥德人，教授，硕士生导师，研究方向：数论

$|>M$ 成立.

张文鹏[6]教授讨论了方程 $Z(n)=S(n)$ 和 $Z(n)+1=S(n)$ 的正整数解问题;

范盼红[7]在其硕士论文中研究了方程 $Z(n)=\varphi(n)$ 可解性问题,并给出解有如下形式:

(1) $n=p$,其中 p 为素数;(2) $n=2p$,其中 $p\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$;(3) $n=2^k p$,其中,$p\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$,且 $p\mid(2^{k-1}-1)$.

本文作者前期已经对方程 $\varphi(n)=Z(n^2)$ 的可解性问题进行了研究.在此基础上,本文利用初等方法讨论两个方程 $\varphi(n)=Z(n^k)$ 与 $Z(n)+\varphi(n)=2n$ 的可解性问题,并给出其所有正整数解.

1 基本定义及引理

定义[8] Euler 函数 $\varphi(n)$ 定义为不大于 n 且与 n 互素的正整数的个数.

引理1[8] Euler 函数为积性函数,即对于任意互素的正整数 m 和 n,则有 $\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n)$.

引理2[8] 设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 是正整数 n 的标准分解式,则有 $\varphi(n)=\prod\limits_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)$.

引理3[8] 对于素数 p 与 $\alpha\geqslant 1$,有 $\varphi(p^\alpha)=p^\alpha-p^{\alpha-1}$.

引理4[9] 对任意的素数 $p\geqslant 3$,$Z(p)=p-1$.

引理5[9,10] 对任意的素数 $p\geqslant 3$ 及 $k\in N$,$Z(p^k)=p^k-1$.当 $p=2$ 时,则有 $Z(2^k)=2^{k+1}-1$.

引理6[9] $Z(n)$ 是不可加的,即 $Z(m+n)$ 不恒等于 $Z(m)+Z(n)$;$Z(n)$ 也不是可乘的,即 $Z(m\cdot n)$ 不恒等于 $Z(m)\cdot Z(n)$.

引理7[10] $Z(n)\leqslant 2n-1$;若 n 为奇数,则 $Z(n)\leqslant n-1$.

2 主要结论及其证明

定理1 对任意的正整数 n 和 $k\geqslant 2$,方程

$$\varphi(n)=Z(n^k) \tag{1}$$

仅有正整数解 $n=1$.

下面提到的 p,p_i 均为素数.

证明:对正整数 n 进行分类讨论.

(1)当 n 为奇数时,可分为以下4种情况讨论:

(ⅰ)当 $n=1$ 时,$\varphi(1)=Z(1)=1$,所以 $n=1$ 是方程(1)的解.

(ⅱ)当 $n=p(p\geqslant 3)$ 时,$\varphi(p)=p-1$,$Z(p^k)=p^k-1$,则 $\varphi(p)\neq Z(p^k)$,所以 $n=p$ 不是方程(1)的解.

(ⅲ)当 $n=p^t(p\geqslant 3),t>1$ 时,$\varphi(p^t)=p^{t-1}(p-1)$,$Z(p^{kt})=p^{kt}-1$,$\varphi(p^t)\neq Z(p^{kt})$,所以 $n=p^t$ 不是方程(1)的解.

(ⅳ)当 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t}$,其中 $p_i\geqslant 3(i=1,2,\cdots,t)$ 时,$\varphi(n)=p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}\cdots p_t^{\alpha_t-1}(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_t-1)$,如果 $\varphi(n)=Z(n^k)$ 成立,则由函数 $Z(n)$ 的定义知:$n^k\mid\dfrac{\varphi(n)(\varphi(n)+1)}{2}$,即:

$$p_1^{k(\alpha_1-1)}p_2^{k(\alpha_2-1)}\cdots p_t^{k(\alpha_t-1)}\mid$$
$$p_1^{(\alpha_1-1)}p_2^{(\alpha_2-1)}\cdots p_t^{(\alpha_t-1)}(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_t-1),$$

亦即:

$$p_1^{(k-1)\alpha_1-k+1}p_2^{(k-1)\alpha_2-k+1}\cdots p_t^{(k-1)\alpha_t-k+1}\mid$$
$(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_t-1)$,显然不成立.

所以 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t}$ 不是方程(1)的解.

(2)当 n 为偶数时,可分为以下3种情况讨论:

(ⅰ)当 $n=2^t(t\geqslant 1)$ 时,$\varphi(2^t)=2^{t-1}$,$Z(2^{kt})=2^{kt+1}-1$,则 $\varphi(2^t)\neq Z(2^{kt})$,所以 $n=2^t$ 不是方程(1)的解.

(ⅱ)当 $n=2^tp^l$ 且 $t\geqslant 1,p\geqslant 3,l\geqslant 1$ 时,$\varphi(2^tp^l)=\varphi(2^t)\varphi(p^l)=2^{t-1}p^{l-1}(p-1)$,如果 $\varphi(n)=Z(n^k)$ 成立,则由函数 $Z(n)$ 的定义知:$n^k\mid\dfrac{\varphi(n)(\varphi(n)+1)}{2}$,即:

$$2^{kt}p^{kl}\mid\frac{2^{k-1}p^{l-1}(p-1)[2^{k-1}p^{l-1}(p-1)+1]}{2},$$

亦即:

$$2^{k(t-1)+1}p^{k(l-1)+1}\mid\frac{(p-1)[2^{k-1}p^{l-1}(p-1)+1]}{2}.$$

又 $(2,p)=1$,所以,$2^{k(t-1)+1}\nmid\dfrac{p-1}{2}$,

$$p^{k(l-1)+1}\nmid[2^{k-1}p^{l-1}(p-1)+1],$$

所以

$$2^{k(t-1)+1}p^{k(l-1)+1}\mid\frac{(p-1)[2^{k-1}p^{l-1}(p-1)+1]}{2}$$

不成立,所以 $n=2^tp^l$ 不是方程(1)的解.

(ⅲ)当 $n=2^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t}$(其中 $\alpha_i\geqslant 1,0\leqslant i\leqslant t,t\geqslant 2$)时,令 $n=2^{\alpha_0}m$,则 $\varphi(n)=2^{\alpha_0-1}\varphi(m)$.如果 $\varphi(n)=Z(n^k)$ 成立,则由函数 $Z(n)$ 的定义知:$n^k\mid\dfrac{\varphi(n)[\varphi(n)+1]}{2}$,即

$$2^{k\alpha_0}m^k\mid(2^{\alpha_0-2}\varphi(m))(2^{\alpha_0-1}\varphi(m)+1),$$

又 $(2^{k\alpha_0},m^k)=1$,所以,$2^{k\alpha_0}\nmid(2^{\alpha_0-2}\varphi(m))$,$m^k\nmid(2^{\alpha_0-1}\varphi(m)+1)$,所以

$$2^{k\alpha_0}m^k\nmid(2^{\alpha_0-2}\varphi(m))(2^{\alpha_0-1}\varphi(m)+1),$$

得出矛盾,所以 $n=2^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t}$ 不是方程(1)的解.

综上所述,方程(1)仅有正整数解 $n=1$.

定理 2　对任意的正整数 n ,方程

$$Z(n)+\varphi(n)=2n \tag{2}$$

仅有正整数解 $n=1,2$.

定理 2 的证明与定理 1 证明类似,下面进行简单证明.

证明:(1)当 n 为奇数时,可分为以下 4 种情况讨论:

(ⅰ) 当 $n=1$ 时,显然成立,所以 $n=1$ 是方程(2) 的解.

(ⅱ) 当 $n=p(p\geqslant 3)$ 时,$Z(p)=p-1$,$\varphi(p)=p-1$,则 $Z(p)+\varphi(p)=2(p-1)\neq 2p$,所以 $n=p$ 不是方程(2) 的解.

(ⅲ) 当 $n=p^k(p\geqslant 3)$,$k>1$ 时,$Z(p^k)=p^k-1$,$\varphi(p^k)=p^{k-1}(p-1)$,则 $Z(p^k)+\varphi(p^k)=2p^k-p^{k-1}-1\neq 2p^k$,所以 $n=p^k$ 不是方程(2) 的解.

(ⅳ) 当 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,其中 $p_i\geqslant 3(i=1,2,\cdots,k)$ 时,由引理 7 知 $Z(n)\leqslant n-1$,即,$Z(n)\leqslant p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}-1$,又 $\varphi(n)=p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}\cdots p_k^{\alpha_k-1}(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_k-1)$,所以有

$$\begin{aligned}&Z(n)+\varphi(n)\leqslant(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}-1)+\\&p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}\cdots p_k^{\alpha_k-1}(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_k-1)=\\&p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}\cdots p_k^{\alpha_k-1}[(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_k-1)+\\&p_1p_2\cdots p_k]-1\leqslant p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}\end{aligned}$$

显然不成立. 所以 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 不是方程(2)的解.

(2)当 n 为偶数时,可分为以下 4 种情况讨论:

(ⅰ) 当 $n=2$ 时,显然成立,所以 $n=2$ 是方程(2) 的解.

(ⅱ) 当 $n=2^k(k>1)$ 时,$Z(2^k)=2^{k+1}-1$,$\varphi(2^k)=2^{k-1}$,显然不成立,所以 $n=2^k$ 不是方程(2)的解.

(ⅲ) 当 $n=2^kp^l$ 且 $k\geqslant 1,p\geqslant 3,l\geqslant 1$ 时,有 $\varphi(2^kp^l)=\varphi(2^k)\varphi(p^l)=2^{k-1}p^{l-1}(p-1)$,由 $Z(n)+\varphi(n)=2n$ 可得:$Z(n)=2n-\varphi(n)=2^{k-1}p^{l-1}(3p+1)$,则由函数 $Z(n)$ 的定义知:

$$2^kp^l\mid\frac{2^{k-1}p^{l-1}(3p+1)[2^{k-1}p^{l-1}(3p+1)+1]}{2},$$

即:$2p\mid\dfrac{(3p+1)[2^{k-1}p^{l-1}(3p+1)+1]}{2}$.

又 $(2,p)=1$,$2^{k-1}p^{l-1}(3p+1)+1$ 为奇数,2 不能整除 $2^{k-1}p^{l-1}(3p+1)+1$,所以只能 p 整除 $2^{k-1}p^{l-1}(3p+1)+1$,显然不成立.

因此,$n=2^kp^l$ 不是方程(2) 的解.

(ⅳ) 当 $n=2^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$(其中 $\alpha_i\geqslant 1,0\leqslant i\leqslant k,k\geqslant 2$) 时,同理可得出矛盾,所以 $n=2^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 不是方程(2) 的解.

综上所述,方程(2) 仅有正整数解 $n=1,2$.

3　结束语

关于伪 Smarandache 函数的性质虽然取得了不少进展,但是仍然存在不少问题. 本文在文献[6,7]研究的基础上,利用初等方法对两个包含伪 Smarandache 函数的方程可解性问题进行了研究,并得到其所有正整数解,拓宽了伪 Smarandache 函数在方程问题的研究内容.

参考文献

[1] Kashihara Kenichiro. Comments and topics on smarandache notions and problems[M]. USA:Erhus University Press,1996.

[2] A. A. K. Majumdar. A note on the Pseudo-Smarandache function[J]. Scientia Magna,2006,2(3):1-25.

[3] Yuanbing Lou. On the pseudo smarandache function[J]. Scientia Magna,2007,3(4):48-50.

[4] Lin Cheng. On the mean value of the Pseudo-Smarandache function[J]. Scientia Magna,2007,3(3):97-100.

[5] Yani Zheng. On the pseudo smarandache function and its two conjectures[J]. Scientia Magna,2007,3(4):74-76.

[6] 张文鹏. 关于 F. Smarandache 函数的两个问题[J]. 西北大学学报,2008,38(2):173-175.

[7] 范盼红. 对 Catalan 数的性质以及关于 Smarandache 函数的几个方程的研究[D]. 西安:西北大学,2012.

[8] Tom M. Apostol. Introduction to analytic number theory [M]. New York: Spring-Verlag, 1976.

[9] 马　荣. Smarandache 函数及其相关问题研究[M]. USA: The Educational Publisher, 2012.

[10] Richard Pinch. Some properties of the Pseudo Smarandache function[J]. Scientia Magna,2005,1(2):167-172.