Published in: Marcelina Mocanu, Cornel Berceanu, Catalin Barbu (coordinators), Simpozionul National de Geometrie "Gheorghe Titeica": editia II, Bacau, Romania, 24-27 martie 2011, Editura Docucenter, Bacau, Romania.

# UN MODEL SIMPLU DE GEOMETRIE SMARANDACHE CONSTRUIT EXCLUSIV CU ELEMENTE DE GEOMETRIE EUCLIDIANĂ

OVIDIU ŞANDRU[27]

În spaţiul euclidian tridimensional considerăm două plane paralele şi distincte $\alpha_1$ şi $\alpha_2$. Spaţiul Smarandache $\Sigma$, pe care îl definim, este alcătuit din punctele acestor două plane, sau altfel zis, $\Sigma = \alpha_1 \cup \alpha_2$. Tot prin definiţie, considerăm că dreptele acestui spaţiu sunt date de dreptele euclidiene incluse în $\alpha_1$, sau $\alpha_2$. În legătură cu elementele modelului geometric $\Sigma$ enunţăm următoarele definiţii :

**Definiţia 1:** Orice două drepte (ale modelului $\Sigma$) care nu se intersectează între ele se numesc *drepte paralele.*

**Definiţia 2:** Despre o dreaptă (din $\Sigma$) spunem că *separă* două puncte distincte (din $\Sigma$) nesituate pe această dreaptă dacă segmentul determinat de aceste două puncte se intersectează cu dreapta dată.

În continuare vom analiza pe acest model geometric valorile de adevăr a următoarelor trei axiome ale geometriei euclidiene plane:

**Propoziţia 1**: *Prin orice două puncte distincte (ale planului euclidian) trece o dreaptă şi numai una.*

**Propoziţia 2** (Postulatul lui Euclid): *Printr-un punct exterior unei drepte trece o singură paralelă la cea dreaptă.*

**Propoziţia 3** (Axioma de separare a planului) : *Fie $d$ o dreaptă şi $A, B, C$ trei puncte nesituate pe $d$. Dacă dreapta $d$ separă* punctele $A$ şi $B$ dar nu separă punctele $B$ şi $C$, atunci ea separă punctele $A$ şi $C$.

[27] Universitatea Politehnică din Bucureşti

1) Fie $A$ şi $B$ două puncte distincte din $\Sigma$. Dacă $A,B\in \alpha_1$ sau dacă $A,B\in \alpha_2$, atunci prin aceste puncte trece o dreaptă a spaţiului $\Sigma$ şi numai una . Dacă $A\in \alpha_1$ şi $B\in \alpha_2$, sau $A\in \alpha_2$ şi $B\in \alpha_1$, atunci prin aceste puncte nu trece nici o dreaptă a spaţiului $\Sigma$.

2) Fie $d$ o dreaptă a spaţiului $\Sigma$ şi $A$ un punct din $\Sigma$ nesituat pe $d$. Dacă punctul $A$ şi dreapta $d$ sunt în acelaşi plan ($A\in \alpha_1, d\subset \alpha_1$, sau $A\in \alpha_2, d\subset \alpha_2$), atunci prin punctul $A$ nu putem duce decât o paralelă la dreapta $d$.

Dacă punctul $A$ şi dreapta $d$ sunt în plane diferite ($A\in \alpha_1, d\subset \alpha_2$, etc), atunci prin punctul $A$ putem duce o infinitate de (drepte care să nu intersecteze dreapta $d$) paralele la dreapta $d$.

3) Fie $d$ o dreaptă, iar $A,B,C$ trei puncte ale spaţiului $\Sigma$ care nu aparţin lui $d$.

i) Dacă cele trei puncte $A,B,C$ şi dreapta $d$ se găsesc incluse în acelaşi plan, atunci pentru aceste elemnte se verifică axioma de separare.

ii) Dacă unul dintre punctele $A,B,C$ se găseşte într-un plan diferit de planul în care se găsesc celelalte două puncte şi dreapta $d$, atunci axioma de separare nu mai este verificată pentru aceste elemente.

**Observaţii :**

1) Spre deosebire de modelul geometriei euclidiene unde Propoziţia 1 are valoare de axiomă, în cadrul modelului geometric construit de noi această propoziţie nu este nici total adevărată, nici total falsă, ci prezintă un grad de incertitudine egal cu $0.5$. Într-adevăr, alegând la întâmplare două puncte distincte din $\Sigma$, probabilitatea ca prin aceste puncte să treacă o dreaptă a spaţiului $\Sigma$ este egală cu probabilitatea evenimentului contrar, adică cu $0.5$.

2) În mod asemănător, celebrul postulat al lui Euclid din geometria plană are în cadrul modelului nostru geometric o valoare de adevăr bivalentă: alegând la întâmplare din $\Sigma$ o dreaptă şi un punct care nu este situat pe această dreaptă, şansele ca postulatul lui Euclid să fie verificat sau infirmat sunt ambele egale cu $0.5$. Acelaşi lucru se întâmplă şi cu axioma de separare.

3) Modelul geometric prezentat se poate generaliza uşor considerând în loc de două plane paralele şi distincte, $n \geq 3$ plane paralele şi distincte şi chiar cazul unui număr infinit de plane paralele şi distincte din spaţiu. În acest context spaţiul Smarandache corespunzător va fi notat cu $\Sigma_n$, respectiv, cu $\Sigma_\infty$, iar spaţiul $\Sigma$ prezentat mai devreme va coincide cu $\Sigma_2$.

4) Modelele geometrice geometrice $\Sigma_n, n \geq 2$, $\Sigma_\infty$, sunt construite exclusiv cu elemente ale geometriei euclidiene.

5) Spaţiul $\Sigma = \Sigma_2$ prezentat mai devreme reprezintă cel mai simplu model de geometrie Smarandache.

## O soluţie parţială a conjecturii lui Kuciuk şi Antholy

În **[1]** găsim problema: "*Is there a general model for all Smarandache Geometries in such a way that replacing some parameters one gets any of the desired particular* SG?".

În cele ce urmează vom construi o familie uniparametrică de modele geometrice care va constitui, cel puţin parţial, o soluţie la această problemă. Pentru aceasta vom extinde familia de spaţii $\Sigma_n, n \geq 2$, la familia $\Sigma_n, n \geq 1$, în care $\Sigma_1$ va reprezenta planul euclidian autentic (mulţimea punctelor spaţiului $\Sigma_1$ este dată de mulţimea punctelor planului euclidian 2-dimensional, iar dreptele spaţiului $\Sigma_1$ sunt dreptele, în sens euclidian, ale acestui plan). În felul acesta obţinem familia unidimensională de spaţii $\Sigma_n, n \geq 1$, care pentru $n = 1$ furnizează modelul clasic al geometriei euclidiene, iar pentru orice $n \geq 2$, în parte, câte o geometrie Smarandache cu diferite ordine de incertitudine, sau de negare.

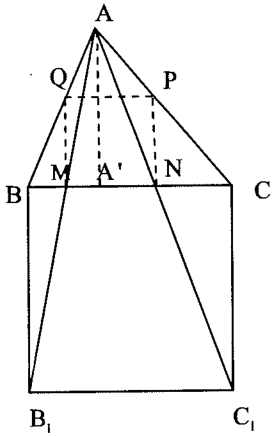
### Bibliografie


[1] L. Kuciuk and M. Antholy, **An Introduction to the Smarandache Geometries**, Mathematics Magazine, Aurora, Canada, Vol. 12, 2003.

# TRIUNGHIUL LUI LUCAS

GABRIEL PUIU[28] şi MĂDĂLIN BERTEA[29]

Pe latura $BC$ a triunghiului $ABC$ în exterior se construieşte pătratul $BCC_1B_1$. Fie $\{M\}=AB_1\cap BC$ şi $\{N\}=AC_1\cap BC$. Fie $P$ şi $Q$ punctele de intersecţie dintre perpendicularele ridicate din $N$ şi $M$ pe latura $BC$ şi laturile $AC$, respectiv $AB$.




***1) Patrulaterul** MNPQ **este pătrat.***

*Demonstraţie.* Din asemănările triunghiurilor $AQM$ şi $ABB_1$; $APN$ şi $ACC_1$; $APN$ şi $AB_1C_1$ rezultă: $\frac{AM}{AB_1}=\frac{MQ}{BB_1}=\frac{AQ}{AB}$, $\frac{AN}{AC_1}=\frac{NP}{CC_1}=\frac{AP}{AC}$, $\frac{MN}{B_1C_1}=\frac{AM}{AB_1}=\frac{AN}{AC_1}$ (1), de unde $\frac{MQ}{BB_1}=\frac{NP}{CC_1}$ şi cum $BB_1\equiv CC_1$ rezultă $MQ\equiv NP$. Deoarece $MQ\parallel NP$ şi $MQ\perp BC, NP\perp BC$ rezultă că patrulaterul $MNPQ$ este dreptunghi. Atunci, $PQ\parallel BC$ şi $PQ\equiv MN$ (2). Din relaţiile (1) şi (2) rezultă

[28] Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri" din Bacău
[29] Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri" din Bacău

$\frac{AQ}{AB}=\frac{QP}{BC}=\frac{MN}{BC}=\frac{QM}{BB_1}$ (şi cum $BC\equiv BB_1$), de unde $MN\equiv QM$, deci patrulaterul $MNPQ$ este pătrat.

*Observație:* Cercul circumscris triunghiului $APQ$ se numeşte ***A – Lucas***. Analog, se definesc ***cercurile B – Lucas*** şi ***C – Lucas***. Fie $L_A, L_B, L_C$ centrele cercurilor Lucas. Triunghiul $L_A L_B L_C$ se numeşte ***triunghiul lui Lucas***.

***2) Fie a, b, c lungimile laturilor triunghiului ABC şi R raza cercului circumscris acestui triunghi. Pătratul MNPQ are latura de lungime egală cu*** $\frac{a}{1+\frac{2aR}{bc}}$.

*Demonstrație.* Fie $A'$ piciorul înălțimii duse din $A$. Din asemănarea triunghiurilor $AQP$ şi $ABC$ rezultă: $\frac{AQ}{c}=\frac{AP}{b}=\frac{QP}{a}$, de unde $AQ=\frac{c}{a}l, AP=\frac{b}{a}l$, ($PQ=l$), iar din asemănarea triunghiurilor $BQM$ şi $BAA'$ rezultă $\frac{BQ}{AB}=\frac{QM}{AA'}$, de unde $\frac{c-\frac{c}{a}l}{c}=\frac{l}{h_a}$ şi de aici $l=\frac{a\cdot h_a}{a+h_a}$. Dar $h_a=\frac{2\cdot A_{ABC}}{a}=\frac{2\cdot abc}{a\cdot 4R}=\frac{bc}{2R}$ de unde rezultă $l=\frac{a}{1+\frac{2aR}{bc}}$.

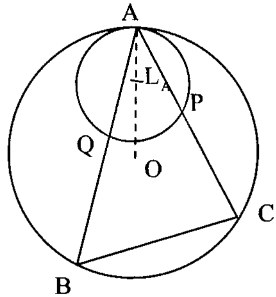
***3) Razele cercurilor A – Lucas, B – Lucas şi C – Lucas sunt egale cu:*** $R_A=\frac{R}{1+\frac{2aR}{bc}}$, $R_B=\frac{R}{1+\frac{2bR}{ac}}$, ***respectiv*** $R_C=\frac{R}{1+\frac{2cR}{ab}}$.

*Demonstrație.* Deoarece triunghiurile $APQ$ şi $ABC$ sunt omotetice, centrul omotetiei fiind punctul $A$ şi raportul de omotetie fiind egal cu

$\frac{l}{a}=\frac{1}{1+\frac{2aR}{bc}}$ (conform proprietății precedente) rezultă că $\frac{R_A}{R}=\frac{l}{a}$ de unde $R_A=\frac{R}{1+\frac{2aR}{bc}}$. Analog se determină lungimile celorlalte două raze.

***4) Cercul circumscris triunghiului $ABC$ și cercurile lui Lucas sunt tangente interior.***

*Demonstrație.* Deoarece triunghiurile $AQP$ și $ABC$ sunt omotetice, prin omotetia de centru $A$ și raport $\frac{1}{1+\frac{2aR}{bc}}$ rezultă că cercurile circumscrise acestor două triunghiuri se corespund prin omotetia considerată, deci cercurile sunt tangente interior.




*Observații:*

1) Raportul de omotetie poate fi considerat și sub forma $\frac{R_A}{R}$

2) Analog se arată că cercurile $B$ – Lucas și $C$ – Lucas sunt tangente interior cercului circumscris triunghiului $ABC$.

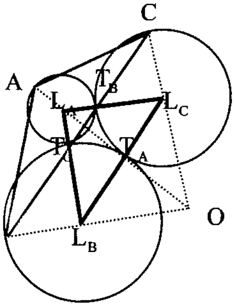
***5) Cercurile lui Lucas sunt tangente două câte două.***

*Demonstrație.* Avem: $OL_B = OB - L_BB = R - R_B$, $OL_C = R - R_C$ și $m(\sphericalangle BOC) = 2m(\sphericalangle BAC)$. Aplicând teorema cosinusului în triunghiul $OL_BL_C$ rezultă: $L_BL_C^2 = OL_B^2 + OL_C^2 - 2OL_B \cdot OL_C \cdot \cos(\sphericalangle L_BOL_C)$.

Cum $OL_B = R - \frac{R}{1+\frac{2bR}{ac}}$, $OL_C = R - \frac{R}{1+\frac{2cR}{ab}}$ și

$\cos(\sphericalangle L_B O L_C) = \cos 2\widehat{A} = 2\cos^2 \widehat{A} - 1 = 2\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) - 1$, rezultă

$$L_B L_C = \frac{2R(abc + b^2R + c^2R)\cdot a}{(ac+2bR)(ab+2cR)} = R_B + R_B,$$




deci cercurile $B$ – Lucas şi $C$ – Lucas sunt tangente. Analog, se arată că cercurile $A$ – Lucas şi $C$ – Lucas respectiv $B$ – Lucas şi $A$ – Lucas sunt tangente.

***6) Laturile triunghiului Lucas au lungimile*** $R_A + R_B, R_B + R_C, R_C + R_A$.

*Demonstraţia* este o consecinţă a proprietăţii precedente.

Fie $T_A, T_B, T_C$ punctele de tangenţă dintre cercurile lui Lucas. Triunghiul $T_A T_B T_C$ se numeşte ***triunghiul tangentelor Lucas***. Cercul circumscris triunghiului $T_A T_B T_C$ se numeşte ***cercul radical al cercurilor Lucas.***

**Bibliografie.**

1. Barbu, C., **Teoreme fundamentale din geometria triunghiului**, Editura Unique, Bacău, 2010.

2. Lalescu, T., **Geometria triunghiului**, Ed. Tineretului, Bucureşti, 1958.