

Propiedades y Problemas Relacionados con las Funciones de Smarandache

*Sebastián Martín Ruiz, Avda. De Regla, 43, Chipiona 11550 (Cádiz), España
M. Perez, Rehoboth, Box 141, NM 87301, E. U.*

Resumen:

En este artículo presentamos definiciones y varias propiedades de algunos tipos de funciones de SMARANDACHE que son explicados en varios problemas propuestos resueltos e irresueltos además de algunas conjeturas de teoría de números y matemáticas recreativas. Son también proporcionados algunos ejemplos. Se adjuntan también interesantes problemas resueltos relacionados con el tema junto a este artículo.

1. Introducción

La *Función de Smarandache* más conocida, la cual ha llegado a ser una función clásica en teoría de números es la siguiente:

$S: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$, $S(1)=1$, $S(n)$ es el menor entero tal que $S(n)!$ es divisible por n .

Por ejemplo: $S(6)=3$, ya que $3!=1 \cdot 2 \cdot 3=6$ que es divisible por 6, y 3 es el menor número con esta propiedad, i.e. $2!$ no es divisible por 6.

$S(8)=4$, $S(11)=11$.

Esta función ha sido muy estudiada la pasada década y se han descubierto interesantes propiedades en relación a ella.

2. Propiedades:

2.1. $\text{Max} \{p, p \text{ es primo y } p \text{ divide } n\} \leq S(n) \leq n$ para cualquier entero positivo n .

2.2. Si $n = (p_1^{s_1}) \cdot (p_2^{s_2}) \cdot \dots \cdot (p_k^{s_k})$, donde p_1, p_2, \dots, p_k son primos distintos entonces $S(n) = \max_{1 \leq i \leq k} \{S(p_i^{s_i})\} \leq \max_{1 \leq i \leq k} \{p_i \cdot s_i\}$.

2.3. *Caracterización de los números primos:*

Sea p un entero > 4 . Entonces: p es primo si y solo si $S(p)=p$.

Demostración:

Sea p un número primo > 4 y supongamos que $S(p)=m < p$, entonces $m!$ no es divisible por p , por tanto $S(p)=p$

Por otro lado, sea $S(p) = p$ y $p \neq 4$; supongamos que p no es primo, por tanto existen dos enteros s y t , con $s \leq t < p$, tal que $p = s \cdot t$, pero entonces $S(p) \leq t \neq p$ ya que $t!$ es divisible por s y t a la vez (i.e. $t!$ Es divisible por p). Contradicción.

2.4 *Una fórmula exacta para calcular el número de primos menores o iguales que x (L. Seagull):*

Si x es un entero ≥ 4 , entonces el número de primos $\leq x$ es:

$$\Pi(x) = -1 + \sum_{k=2}^x \left\lfloor \frac{S(k)}{k} \right\rfloor$$

donde $S(k)$ es la Función de Smarandache clásica, y $\lfloor a \rfloor$ es la parte entera de a (el mayor entero menor o igual que a).

Demostración:

Conocemos que la función de Smarandache tiene la propiedad que si $p > 4$ entonces $S(p) = p$ si y solo si p es primo, además $S(k) \leq k$ para todo k , y $S(4) = 4$ (la única excepción para lo primero), con esto podemos encontrar fácilmente la fórmula exacta para el número de primos menores o iguales que x .

3. Conjeturas:

3.1. La ecuación diofántica $S(n) = S(n+1)$ no tiene solución. (L. Tutescu)

3.2. La ecuación diofántica $S(n) + S(n+1) = S(n+2)$ tiene infinitas soluciones (I. M. Radu)

4. **Más Tipos de Funciones de Smarandache** han sido consideradas y estudiadas, estas son:

4.1 La *Función Doble Factorial de Smarandache*, $Sdf(n)$ es el menor entero tal que $Sdf(n)!!$ es divisible por n , donde el doble factorial se define como:

$m!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot m$, si m es impar;

y $m!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot m$, si m es par.

Por ejemplo:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$SDF(n)$	1	2	3	4	5	6	7	4	9	10	11	6	13	14	5	6

4.2 *Función de Smarandache-Kurepa*:

Para un primo p , $SK(p)$ es el menor entero tal que $!SK(p)$ es divisible por p , donde $!m = 0! + 1! + 2! + \dots + (m-1)!$

Por ejemplo:

p	2	3	7	11	17	19	23	31	37	41	61	71	73	89
$SK(p)$	2	4	6	6	5	7	7	12	22	16	55	54	42	24

4.3. *Función de Smarandache-Wagstaff*:

Para un primo p , $SW(p)$ es el menor entero tal que $W(SW(p))$ es divisible por p , donde $W(m) = 1! + 2! + \dots + (m)!$

Por ejemplo:

p	3	11	17	23	29	37	41	43	53	67	73	79	97
$SW(p)$	2	4	5	12	19	24	32	19	20	20	7	57	6

4.4 *La función Superior de Smarandache de orden k* :

$Sk(n)$ es el menor entero para el cual n divide a $Sk(n)^k$

Por ejemplo, para $k=2$, tenemos:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$S2(n)$	1	2	3	2	5	6	7	4	3	10	11	6	13	14	15	4

4.5. Función Pseudo-Smarandache:

$Z(n)$ es el menor entero tal que $1 + 2 + \dots + Z(n)$ es divisible por n .

Por ejemplo:

n	1	2	3	4	5	6	7
$Z(n)$	1	3	2	3	4	3	6

4.6. Función Entorno al Primorial de Smarandache :

$SNTp(n)$ es el menor primo tal que alguno de estos tres valores $p\# - 1$, $p\#$, o $p\# + 1$ es divisible por n ,

donde $p\#$, para un número primo p , es el producto de todos los primos menores o iguales que p . Esta función solo existe para valores de n libres de cuadrados.

Por ejemplo:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...	59	...
$SNTp(n)$	2	2	2	?	3	3	3	?	?	5	11	...	13	...

5. Otros tipos de funciones de Smarandache que han sido estudiadas los últimos años son:

5.1. Sea $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ una función estrictamente creciente y x un elemento de \mathbb{R} , Entonces:

a) *f-Parte Inferior de Smarandache* de x , $ISf(x)$, es el menor k tal que $f(k) \leq x < f(k+1)$.

b) *f-parte Superior Smarandache* de x , $SSf(x)$ es el menor k tal que $f(k) < x \leq f(k+1)$.

Casos Particulares:

a) Parte S-Prima Inferior:

Para cualquier número real n positivo definimos $ISp(n)$ como el mayor primo menor o igual que n .

Los primeros valores de esta función son:

2,3,3,5,5,7,7,7,7,11,11,13,13,13,13,17,17,19,19,19,23,23.

b) Parte S-Prima Superior:

Para cualquier número real positivo n definimos $SSp(n)$ es el menor primo mayor o igual que n :

Los primeros valores de esta función son:

2,2,2,3,5,5,7,7,11,11,11,11,13,13,17,17,17,17,19,19,23,23,23.

c) Parte S-Cuadrada Inferior:

Para cualquier número real positivo n definimos $ISs(n)$ como el mayor cuadrado menor o igual que n :

Los primeros valores de esta función son:

0,1,1,1,4,4,4,4,4,9,9,9,9,9,9,9,16,16,16,16,16,16,16,16,25,25.

d) Parte S-Cuadrada Superior:

Para cualquier número real positivo n definimos $SSs(n)$ como el menor cuadrado mayor o igual que n .

Los primeros valores de esta función son:

0,1,4,4,4,9,9,9,9,9,16,16,16,16,16,16,16,25,25,25,25,25,25,25,25,36.

e) Parte S-Cúbica Inferior:

Para cualquier número real positivo n definimos $ISc(n)$ el mayor Cubo menor o igual que n .

Los primeros valores de esta función son:

0,1,1,1,1,1,1,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,27,27,27,27.

f) Parte S-Cúbica Superior:

Para cualquier número real positivo n definimos $SSc(n)$ es el menor cubo mayor o igual que n .

Los primeros valores de esta función son:

0,1,8,8,8,8,8,8,27,27,27,27,27,27,27,27,27,27,27,27,27,27.

g) Parte S-Factorial Inferior:

Para cualquier número real positivo n definimos $ISf(n)$ el mayor factorial menor o igual que n .

Los primeros valores de esta función son:

1,2,2,2,2,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,24,24,24,24,24,24,24.

h) Parte S-Factorial Superior:

Para cualquier número real positivo n definimos $SSf(n)$ el menor factorial mayor o igual que n :

Los primeros valores de esta función son:

1,2,6,6,6,6,24,24,24,24,24,24,24,24,24,24,24,24,24,24,24,120.

Comentario 1: Esto es una generalización de la parte entera superior/inferior de un número.

5.2. Sea $f: Z \rightarrow Z$ una función estrictamente creciente y x un elemento de R . Entonces: definimos la *f-Parte Fraccionaria de Smarandache* de x , $FSf(x)=x-ISf(x)$, donde $ISf(x)$ es la *f-Parte Inferior de Smarandache* definida arriba.

Casos Particulares:

a)Parte S-Prima Fraccionaria:

$$FSp(x)=x - ISp(x),$$

donde $ISp(x)$ es la Parte S-Prima Inferior definida arriba.

$$\text{Ejemplo: } FSp(12.501) = 12.501 - 11 = 1.501.$$

b)Parte S-Cuadrada Fraccionaria:

$$FSs(x) = x - ISs(x),$$

donde $ISs(x)$ es la Parte S-Cuadrada Inferior definida arriba.

$$\text{Ejemplo: } FSs(12.501) = 12.501 - 9 = 3.501.$$

c)Parte S-Cúbica Fraccionaria:

$$FSc(x) = x - ISc(x),$$

donde $ISc(x)$ es la Parte S-Cúbica Inferior definida arriba.

$$\text{Ejemplo: } FSc(12.501) = 12.501 - 8 = 4.501.$$

d) Parte S-Factorial Fraccionaria:

$$FSf(x) = x - ISf(x),$$

donde $ISf(x)$ es la Parte S-Factorial Inferior definida arriba.

$$\text{Ejemplo: } FSf(12.501) = 12.501 - 6 = 6.501.$$

Comentario 2.1.: Esto es una generalización de la parte fraccionaria de un número

Comentario 2.2.: De forma similar podemos definir:

-La f-Parte Inferior Fraccionaria de Smarandache:

$$\text{IFSf}(x) = x - \text{ISf}(x) = \text{FSf}(x);$$

-La f-Parte Superior Fraccionaria de Smarandache:

$$\text{SFSf}(x) = \text{SSf}(x) - x;$$

$$\begin{aligned} \text{por ejemplo: Parte Cúbica Superior Fraccionaria de Smarandache de } 12.501 &= \\ &= 27 - 12.501 = 14.499. \end{aligned}$$

5.3. Sea $g: A \rightarrow A$ una función estrictamente creciente, y sea “ \sim ” una ley de composición interna en A . Entonces decimos que $f: A \rightarrow A$ es la *función complementaria de Smarandache respecto de la función g y la ley interna “ \sim ”* si:

$f(x)$ es el menor k tal que existe un z en A que verifica
 $x \sim k = g(z)$.

Casos Particulares:

a) Función de Smarandache Complementario del Cuadrado:

$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) =$ es el menor k tal que $x \cdot k$ es un cuadrado perfecto.

Los primeros valores de esta función son:

1,2,3,1,5,6,7,2,1,10,11,3,14,15,1,17,2,19,5,21,22,23,6,1,26,3,7.

b) Función de Smarandache Complementario del Cubo:

$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) =$ es el menor k tal que $x \cdot k$ es un cubo perfecto.

Los primeros valores de esta función son:

1,4,9,2,25,36,49,1,3,100,121,18,169,196,225,4,289,12,361,50.

De forma más general:

c) Función de Smarandache Complementario de la Potencia m -ésima:

$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) =$ es el menor k tal que $x \cdot k$ es una potencia m -ésima

d) Función de Smarandache Complementario del Primo:

$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) =$ es el menor k tal que $x+k$ es un número primo.

Los primeros valores de esta función son:

1,0,0,1,0,1,0,3,2,1,0,1,0,3,2,1,0,1,0,3,2,1,0,3,2,1,0,5,4,3,2,1,0,1,0,5.

5.4. *Función S-Multiplicativa:*

es una función $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ tal que para cualquier $(a, b) = 1$, $f(a \cdot b) = \max \{f(a), f(b)\}$;

[i.e. cumple la principal propiedad de la función de Smarandache].

Las siguientes funciones son obviamente S-multiplicativas:

a) La función constante $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$, $f(n) = 1$.

b) La función de Smarandache $S: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$, $S(n) = \max \{ p! : p \mid n \}$.

Ciertamente muchas propiedades de funciones multiplicativas pueden ser trasladadas a funciones S-multiplicativas.

6. Iteraciones Funcionales de Smarandache:

6.1. Iteración funcional de Smarandache de Primera Especie:

Sea $f: A \rightarrow A$ una función, tal que $f(x) \leq x$ para todo x , y

$$\min \{f(x), x \in A\} \geq m_0 \neq -\infty.$$

Supongamos que f tiene en $p \geq 1$ un punto fijo: $m_0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_p$.

[Un punto x es llamado punto fijo si $f(x) = x$.] Entonces:

$SII_f(x)$ = es el menor número de iteraciones k tal que

$f(f(\dots f(x)\dots)) = \text{constante}$

iterada k veces.

Ejemplo:

Sea $n > 1$ un número entero, y $d(n)$ el número de divisores positivos de n ,

$d: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

entonces $SII_d(n)$ es el menor número de iteraciones k

tal que $d(d(\dots d(n)\dots)) = 2$;

iterada k veces

puesto que $d(n) < n$ para $n > 2$, y el punto fijo de la función d es 1

y 2.

Tenemos que $SII_d(6) = 3$, ya que $d(d(d(6))) = d(d(4)) = d(3) = 2 = \text{constante}$.

$SII_d(5) = 1$, puesto que $d(5) = 2$.

6.2. Iteración funcional de Smarandache de Segunda especie:

Sea $g: A \rightarrow A$ una función, tal que $g(x) > x$ para todo x , y sea $b > x$. Entonces:

$SI2_g(x, b)$ = es el menor número de iteraciones tal que

$g(g(\dots g(x)\dots)) \geq b$.

iterada k veces

Ejemplo:

Sea $n > 1$ un número entero, y $\Sigma(n)$ la suma de los divisores positivos

de n (1 y n incluidos), $\Sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Entonces $SI2_\Sigma(n, b)$ es el menor número de iteraciones k tal que

$\Sigma(\Sigma(\dots \Sigma(n)\dots)) \geq b$,

iterada k veces

puesto que $\Sigma(n) > n$ para $n > 1$.

se tiene $SI2_\Sigma(4, 11) = 3$, ya que $\Sigma(\Sigma(\Sigma(4))) = \Sigma(\Sigma(7)) = \Sigma(8) = 15 \geq 11$.

6.3. Iteración Funcional de Smarandache de Tercera Especie:

Sea $h: \rightarrow A$ una función, tal que $h(x) < x$ para todo x , y sea $b < x$. Entonces:

$SI3_h(x, b)$ = es el menor número de iteraciones k tal que

$h(h(\dots h(x)\dots)) \leq b$.

iterada k veces

Ejemplo:

Sea n un número entero y $gd(n)$ el mayor divisor de n , menor que n ,
 $gd: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ con $gd(n) < n$ para $n > 1$.

$SI_{3_{gd}}(60, 3) = 4$, puesto que $gd(gd(gd(gd(60)))) = gd(gd(gd(30))) =$
 $gd(gd(15)) = gd(5) = 1 \leq 3$.

7 Referencias:

- [1] Ashbacher, C., "A Note on the Smarandache Near-To-Primordial Function", <Smarandache Notions Journal>, Vol. 7, No. 1-2-3, 46-49, 1996.
- [2] Ashbacher, C., "Some Properties of the Smarandache-Kurepa and Smarandache-Wagstaff Functions", <Mathematics and Informatics Quarterly>, Vol. 7, No. 3, pp. 114-116, 1997.
- [3] Begay, A., "Smarandache Ceil Functions", in <Bulletin of Pure and Applied Sciences>, India, Vol. 16E, No. 2, 227-229, 1997.
- [4] Castillo, Jose, "Other Smarandache Type Functions", <http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/funct2.txt>
- [5] Dumitrescu, C., Seleacu, V., "Some notions and questions in number theory", Erhus Univ. Press, Glendale, 1994. <http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/snaqint.txt>
- [6] Ibstedt, H., "Smarandache Iterations of First and Second Kinds", <Abstracts of Papers Presented to the American Mathematical Society>, Vol. 17, No. 4, Issue 106, 680, 1996.
- [7] Kashihara, K., "Comments and Topics on Smarandache Notions and Problems", Erhus Univ. Press, Vail, USA, 1996. <http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/Kashihara.pdf>
- [8] Mudge, Mike, "The Smarandache Near-To-Primordial (S.N.T.P.) Function", <Smarandache Notions Journal>, Vol. 7, No. 1-2-3, 45, 1996.
- [9] Popescu, Marcela, Nicolescu, Mariana, "About the Smarandache Complementary Cubic Function", <Smarandache Notions Journal>, Vol. 7, no. 1-2-3, 54-62, 1996.
- [10] Popescu, Marcela, Seleacu, Vasile, "About the Smarandache Complementary Prime Function", <Smarandache Notions Journal>, Vol. 7, No. 1-2-3, 12-22, 1996.
- [11] Ruiz, Sebastian Martin, "Applications of Smarandache Function, Prime and Coprime Functions", American Research Press, Rehoboth, 2002; <http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/SMRuiz-eBook.pdf>
- [12] Seagull, L., "The smarandache Function and the number of primes up to x ", <Mathematical Spectrum>, University of Shielfield, Vol. 28, No. 3, 53, 1995/6. <http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/FORMULA.TXT>
- [13] Smarandache, F., "A Function in Number Theory", Analele Univ. Timisoara, XVIII, fasc. 1, 79-88, 1980; <http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/SFBook1.pdf>
- [14] Smarandache, Florentin, "Only Problems, not Solutions!", Xiquan Publishing House, Phoenix-Chicago, 1990, 1991, 1993; <http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/OPNS.pdf>
- [15] "The Florentin Smarandache papers" Special Collection, Arizona State University, Hayden Library, Tempe, Box 871006, AZ 85287-1006, USA;

[16] Tabirca, Sabin, "About S-Multiplicative Functions", <Octagon>, Brasov, Vol. 7, No. 1, 169-170, 1999.

[17] Weisstein, Eric W., "CRC Concise Encyclopedia of Mathematics", CRC Press, Boca raton, 1998.

Otros libros electrónicos de Sucesiones y Funciones de Smarandache pueden bajarse de Internet en la dirección

<http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/eBooks-otherformats.htm>

y hay trabajos de investigación en <http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/math.htm>.